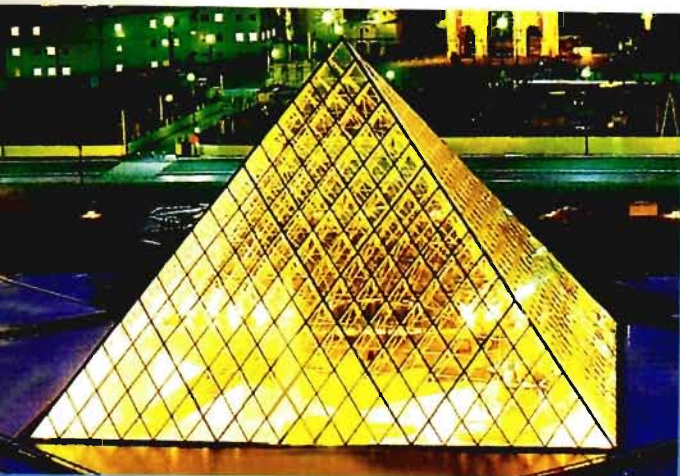
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HÌNH HỌC



11



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRẦN VĂN HẠO (Tổng Chủ biên)
NGUYỄN MỘNG HY (Chủ biên)
KHU QUỐC ANH – NGUYỄN HÀ THANH – PHAN VĂN VIỆN

HÌNH HỌC 11

(Tái bản lần thứ ba)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

Kí hiệu dùng trong sách

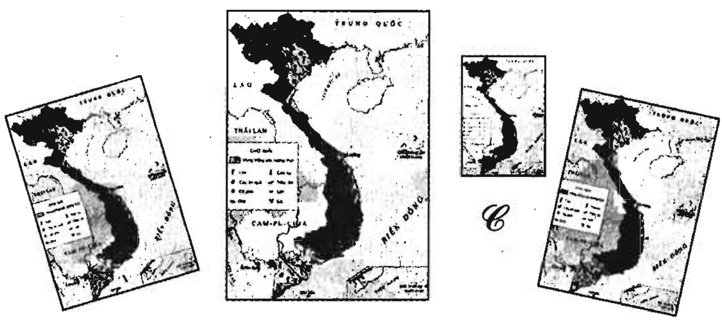
△ Hoạt động của học sinh trên lớp

01-2010/CXB/567-1485/GD Mã số : CH102T0

CHƯƠNG I

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

- ❖ Phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm và phép quay
- ❖ Khái niệm về phép dời hình và hai hình bằng nhau
- ❖ Phép vị tự, tâm vị tự của hai đường tròn
- ❖ Khái niệm về phép đồng dạng và hai hình đồng dạng



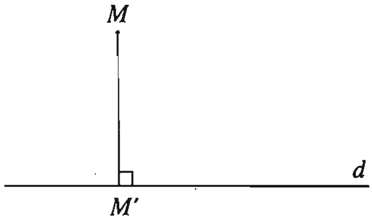
$\mathscr{A}$ $\mathscr{B}$ $\mathscr{C}$ $\mathscr{D}$

Nhìn những tấm bản đồ Việt Nam trên đây ta thấy đó là những hình giống nhau cùng nằm trên một mặt phẳng. Hai hình $\mathscr{A}$ và $\mathscr{D}$ giống nhau cả về hình dạng và kích thước, chúng chỉ khác nhau về vị trí trên mặt phẳng. Hai hình $\mathscr{B}$ và $\mathscr{C}$ giống nhau về hình dạng nhưng khác nhau về kích thước và vị trí. Ta gọi $\mathscr{A}$ và $\mathscr{D}$ là hai hình bằng nhau, còn $\mathscr{B}$ và $\mathscr{C}$ là hai hình đồng dạng với nhau. Vậy thế nào là hai hình bằng nhau hay đồng dạng với nhau ? Trong chương này ta sẽ nghiên cứu về những vấn đề đó.

§1. PHÉP BIẾN HÌNH

△1 Trong mặt phẳng cho đường thẳng d và điểm M. Dựng hình chiếu vuông góc M' của điểm M lên đường thẳng d.

Ta đã biết rằng với mỗi điểm M có một điểm M' duy nhất là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng d cho trước (h.1.1).



Hình 1.1

Ta có định nghĩa sau.

Định nghĩa

Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.

Nếu kí hiệu phép biến hình là F thì ta viết $F(M) = M'$ hay $M' = F(M)$ và gọi điểm M' là ảnh của điểm M qua phép biến hình F.

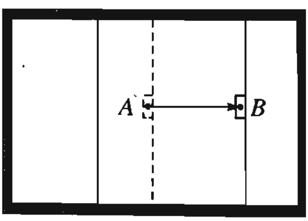
Nếu $\mathscr{H}$ là một hình nào đó trong mặt phẳng thì ta kí hiệu $\mathscr{H}' = F(\mathscr{H})$ là tập các điểm $M' = F(M)$, với mọi điểm M thuộc $\mathscr{H}$. Khi đó ta nói F *biến hình* $\mathscr{H}$ *thành hình* $\mathscr{H}'$, hay *hình* $\mathscr{H}'$ *là ảnh của hình* $\mathscr{H}$ qua phép biến hình F.

Phép biến hình biến mỗi điểm M thành chính nó được gọi là *phép đồng nhất*.

△2 Cho trước số a dương, với mỗi điểm M trong mặt phẳng, gọi M' là điểm sao cho $MM' = a$. Quy tắc đặt tương ứng điểm M với điểm M' nêu trên có phải là một phép biến hình không ?

§2. PHÉP TỊNH TIẾN

Khi đẩy một cánh cửa trượt sao cho chốt cửa dịch chuyển từ vị trí A đến vị trí B ta thấy từng điểm của cánh cửa cũng được dịch chuyển một đoạn bằng AB và theo hướng từ A đến B (h.1.2). Khi đó ta nói cánh cửa được tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$.



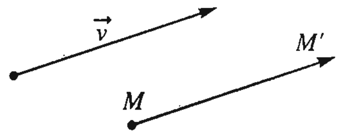
Hình 1.2

I. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa

Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ (h.1.3).

Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ thường được kí hiệu là $T_{\vec{v}}$, $\vec{v}$ được gọi là *vectơ tịnh tiến.*



Hình 1.3

Như vậy

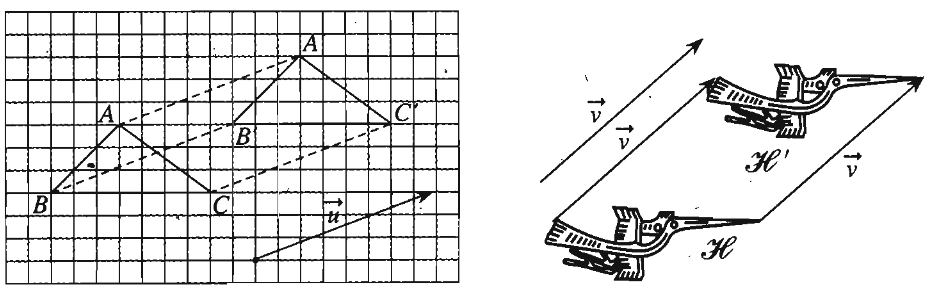
$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}.$$

Phép tịnh tiến theo vectơ - không chính là *phép đồng nhất.*

Ví dụ

a) Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến các điểm A, B, C tương ứng thành các điểm A', B', C' (h.1.4a).

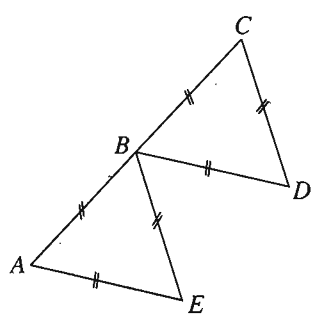
b) Phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$ (h.1.4b).



a) b)

Hình 1.4

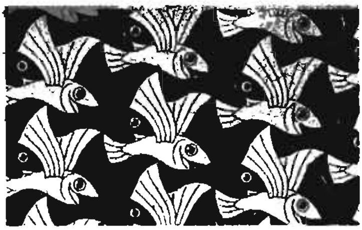
△1 Cho hai tam giác đều ABE và BCD bằng nhau trên hình 1.5. Tìm phép tịnh tiến biến ba điểm A, B, E theo thứ tự thành ba điểm B, C, D.



Hình 1.5

Bạn có biết?

Vẽ những hình giống nhau có thể lát kín mặt phẳng là hứng thú của nhiều hoạ sĩ. Một trong những người nổi tiếng theo khuynh hướng đó là Mô-rit Cooc-ne-li Et-se (Maurits Cornelis Escher), hoạ sĩ người Hà Lan (1898 – 1972). Những bức tranh của ông được hàng triệu người trên thế giới ưa chuộng vì chẳng những rất đẹp mà còn chứa đựng những nội dung toán học sâu sắc. Sau đây là một số tranh của ông.





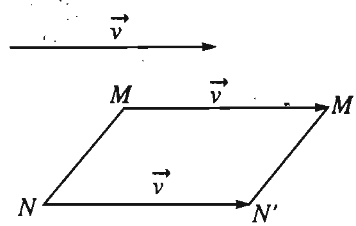
II. TÍNH CHẤT

Tính chất 1

Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'$, $T_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra $M'N' = MN$.

Thật vậy, để ý rằng $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{v}$ và $\overrightarrow{M'M} = -\vec{v}$ (h.1.6), ta có

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'}$$
$$= -\vec{v} + \overrightarrow{MN} + \vec{v} = \overrightarrow{MN}.$$



Hình 1.6

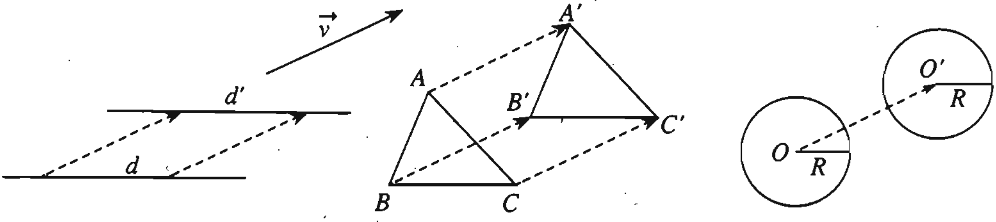
Từ đó suy ra $M'N' = MN$.

Nói cách khác, phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Từ tính chất 1 ta chứng minh được tính chất sau.

Tính chất 2

Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính (h.1.7).

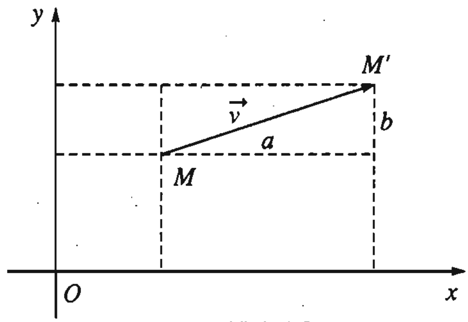


Hình 1.7

△2 Nêu cách xác định ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

III. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (a\ ;\ b)$ (h.1.8). Với mỗi điểm $M(x\ ;\ y)$ ta có $M'(x'\ ;\ y')$ là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$. Khi đó $\overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b. \end{cases}$ Từ đó suy ra $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$



Hình 1.8

Biểu thức trên được gọi là *biểu thức toạ độ* của phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

△3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (1\ ;\ 2)$. Tìm toạ độ của điểm M' là ảnh của điểm $M(3\ ;\ -1)$ qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$.

BÀI TẬP

1. Chứng minh rằng : $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow M = T_{-\vec{v}}(M')$.

2. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Xác định ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AG}$. Xác định điểm D sao cho phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AG}$ biến D thành A.

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (-1\ ;\ 2)$, hai điểm $A(3\ ;\ 5)$, $B(-1\ ;\ 1)$ và đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 3 = 0$.

a) Tìm toạ độ của các điểm A', B' theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

b) Tìm toạ độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

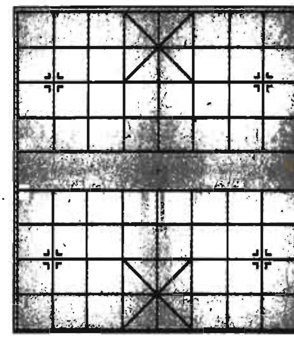
c) Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

4. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Hãy chỉ ra một phép tịnh tiến biến a thành b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến như thế ?

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC



Chùa Dâu ở Bắc Ninh



Bàn cờ tướng

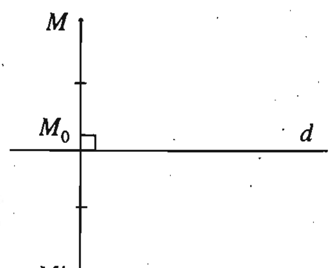
Hình 1.9

Trong thực tế ta thường gặp rất nhiều hình có trục đối xứng như hình con bướm, ảnh mặt trước của một số ngôi nhà, mặt bàn cờ tướng... . Việc nghiên cứu phép đối xứng trục trong mục này cho ta một cách hiểu chính xác khái niệm đó.

I. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa

Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành M′ sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM′ được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng trục d (h.1.10).

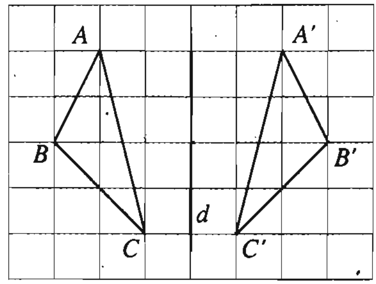


Hình 1.10

Đường thẳng d được gọi là *trục của phép đối xứng* hoặc đơn giản là *trục đối xứng*.

Phép đối xứng trục d thường được kí hiệu là $Đ_d$.

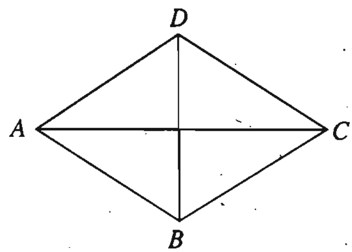
Nếu hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua phép đối xứng trục d thì ta còn nói $\mathscr{H}$ đối xứng với $\mathscr{H}'$ qua d, hay $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ đối xứng với nhau qua d.



Hình 1.11

Ví dụ 1. Trên hình 1.11 ta có các điểm A', B', C' tương ứng là ảnh của các điểm A, B, C qua phép đối xứng trục d và ngược lại.

△1 Cho hình thoi $ABCD$ (h.1.12). Tìm ảnh của các điểm A, B, C, D qua phép đối xứng trục AC.



Hình 1.12

Nhận xét

1) Cho đường thẳng d. Với mỗi điểm M, gọi M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng d. Khi đó

$$M' = Đ_d(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}$$

2) $M' = Đ_d(M) \Leftrightarrow M = Đ_d(M')$.

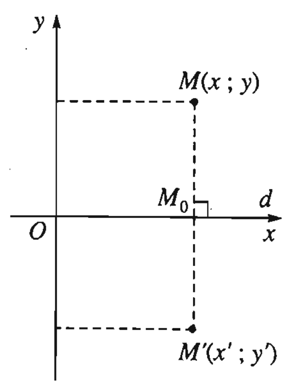
△2 Chứng minh nhận xét 2.

II. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ

1) Chọn hệ toạ độ Oxy sao cho trục Ox trùng với đường thẳng d. Với mỗi điểm $M = (x ; y)$, gọi $M' = Đ_d(M) = (x' ; y')$ (h.1.13) thì

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases}$$

Biểu thức trên được gọi là *biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua trục Ox.*



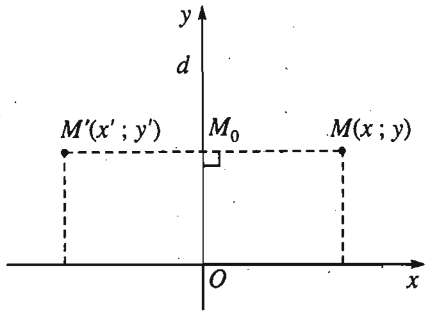
Hình 1.13

△3 Tìm ảnh của các điểm $A(1 ; 2)$, $B(0 ; -5)$ qua phép đối xứng trục Ox.

2) Chọn hệ toạ độ Oxy sao cho trục Oy trùng với đường thẳng d. Với mỗi điểm $M = (x ; y)$, gọi $M' = Đ_d(M) = (x' ; y')$ (h.1.14) thì :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$$

Biểu thức trên được gọi là *biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua trục Oy*.



Hình 1.14

△4 Tìm ảnh của các điểm $A(1 ; 2)$, $B(5 ; 0)$ qua phép đối xứng trục Oy.

III. TÍNH CHẤT

Người ta chứng minh được các tính chất sau.

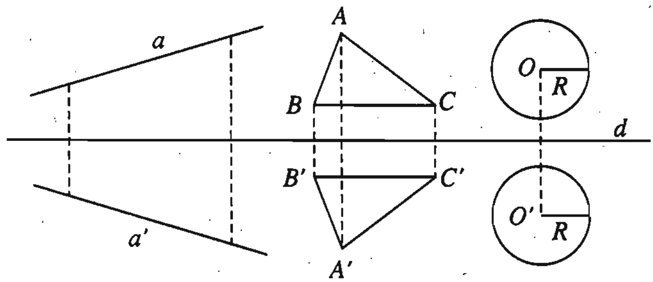
Tính chất 1

Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

△5 Chọn hệ toạ độ Oxy sao cho trục Ox trùng với trục đối xứng, rồi dùng biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua trục Ox để chứng minh tính chất 1.

Tính chất 2

Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính (h.1.15).



Hình 1.15

IV. TRỤC ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

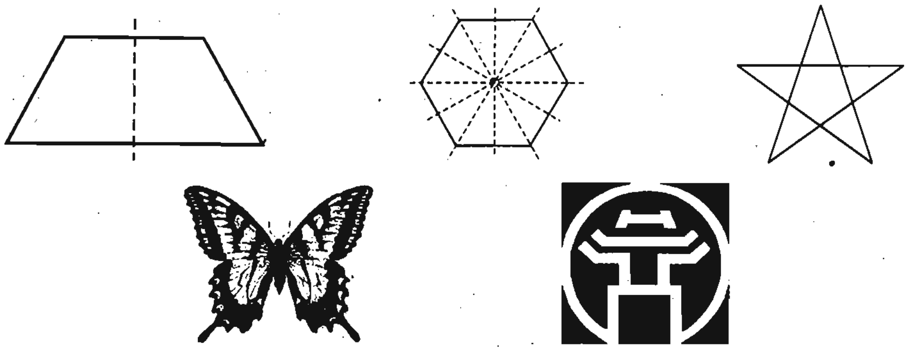
Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng qua d biến $\mathscr{H}$ thành chính nó.

Khi đó ta nói $\mathscr{H}$ là *hình có trục đối xứng*.

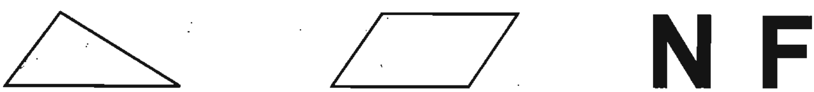
Ví dụ 2

a) Mỗi hình trong hình 1.16 là hình có trục đối xứng.



Hình 1.16

b) Mỗi hình trong hình 1.17 là hình không có trục đối xứng.



Hình 1.17

△6 a) Trong những chữ cái dưới đây, chữ nào là hình có trục đối xứng ?

H A L O N G

b) Tìm một số hình tứ giác có trục đối xứng.

BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm $A(1\ ;\ -2)$ và $B(3\ ;\ 1)$. Tìm ảnh của A, B và đường thẳng AB qua phép đối xứng trục Ox.

2. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x - y + 2 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục Oy.

3. Trong các chữ cái sau, chữ nào là hình có trục đối xứng ?

W

V I E T N A M

O

§4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

Quan sát hình 1.18 ta thấy hai hình đen và trắng đối xứng với nhau qua tâm của hình chữ nhật. Để hiểu rõ loại đối xứng này chúng ta xét phép biến hình dưới đây.



Hình 1.18

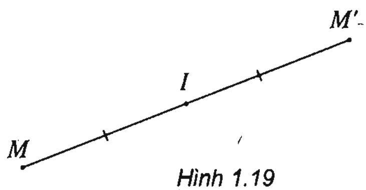
I. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa

Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng tâm I.

Điểm I được gọi là *tâm đối xứng* (h.1.19).

Phép đối xứng tâm I thường được kí hiệu là $Đ_I$.



Hình 1.19

Nếu hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua $Đ_I$ thì ta còn nói $\mathscr{H}'$ đối xứng với $\mathscr{H}$ qua tâm I, hay $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ đối xứng với nhau qua I.

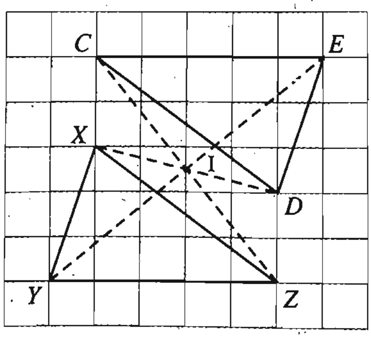
Từ định nghĩa trên ta suy ra

$$M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$$

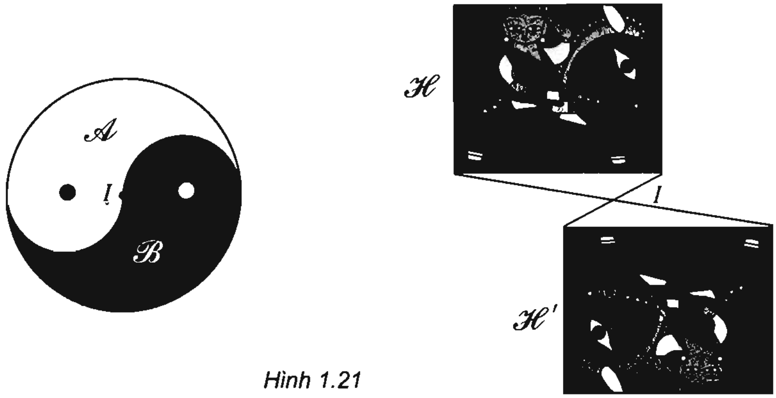
Ví dụ 1

a) Trên hình 1.20 các điểm X, Y, Z tương ứng là ảnh của các điểm D, E, C qua phép đối xứng tâm I và ngược lại.

b) Trong hình 1.21 các hình $\mathscr{A}$ và $\mathscr{B}$ là ảnh của nhau qua phép đối xứng tâm I, các hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ là ảnh của nhau qua phép đối xứng tâm I.



Hình 1.20



Hình 1.21

△1 Chứng minh rằng

$$M' = Đ_I(M) \Leftrightarrow M = Đ_I(M').$$

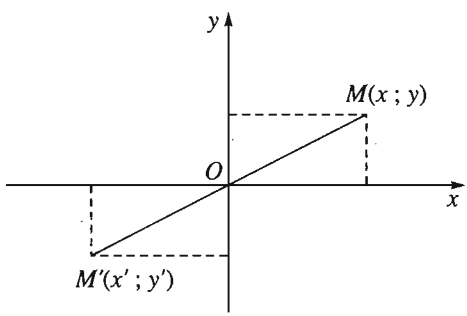
△2 Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Đường thẳng kẻ qua O vuông góc với AB, cắt AB ở E và cắt CD ở F. Hãy chỉ ra các cặp điểm trên hình vẽ đối xứng với nhau qua tâm O.

II. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA PHÉP ĐỐI XỨNG QUA GỐC TOẠ ĐỘ

Trong hệ toạ độ Oxy cho $M = (x\ ;\ y)$, $M' = Đ_O(M) = (x'\ ;\ y')$, khi đó

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \text{(h.1.22)}$$

Biểu thức trên được gọi là *biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua gốc toạ độ.*



Hình 1.22

△3 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $A(-4\ ;\ 3)$. Tìm ảnh của A qua phép đối xứng tâm O.

III. TÍNH CHẤT

Tính chất 1

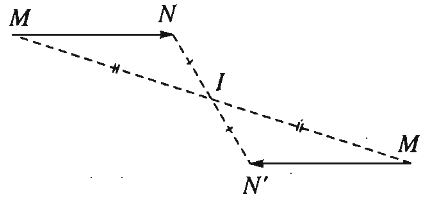
Nếu $Đ_I(M) = M'$ *và* $Đ_I(N) = N'$ *thì* $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$, *từ đó suy ra* $M'N' = MN$.

Thật vậy, vì $\overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$

và $\overrightarrow{IN'} = -\overrightarrow{IN}$ (h.1.23) nên

$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{IN'} - \overrightarrow{IM'}$

$= -\overrightarrow{IN} - (-\overrightarrow{IM}) = -(\overrightarrow{IN} - \overrightarrow{IM}) = -\overrightarrow{MN}.$



Hình 1.23

Do đó $M'N' = MN$.

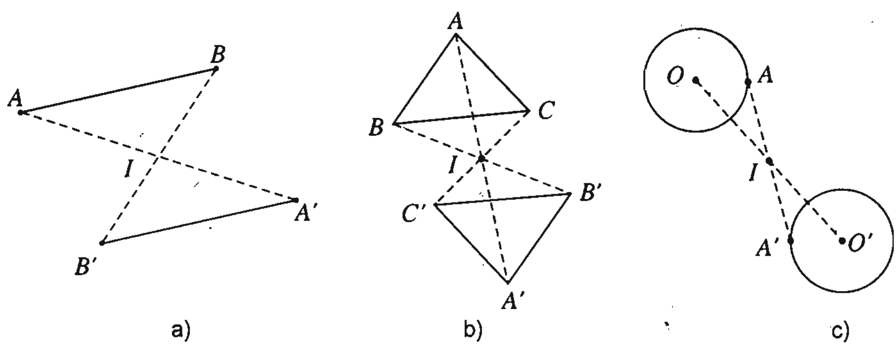
Nói cách khác, *phép đối xứng tâm bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.*

△4 Chọn hệ toạ độ Oxy, rồi dùng biểu thức toạ độ của phép đối xứng tâm O chứng minh lại tính chất 1.

Từ tính chất 1 suy ra

Tính chất 2

Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính (h.1.24).



Hình 1.24

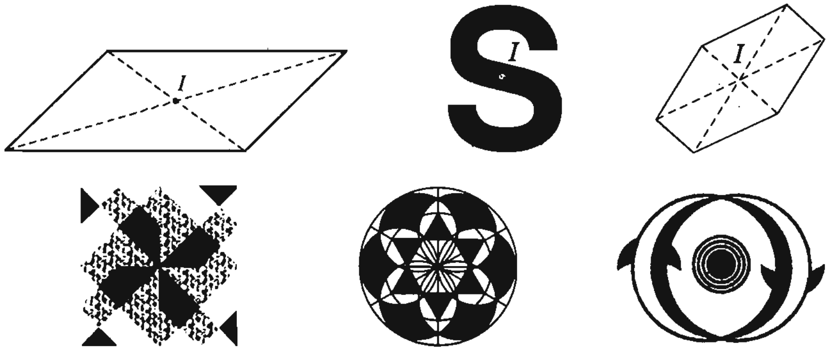
IV. TÂM ĐỐI XỨNG CỦA MỘT HÌNH

Định nghĩa

Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình $\mathscr{H}$ nếu phép đối xứng tâm I biến $\mathscr{H}$ thành chính nó.

Khi đó ta nói $\mathscr{H}$ là hình có tâm đối xứng.

Ví dụ 2. Trên hình 1.25 là những hình có tâm đối xứng.



Hình 1.25

△5 Trong các chữ sau, chữ nào là hình có tâm đối xứng ?

H A N O I

△6 Tìm một số hình tứ giác có tâm đối xứng.

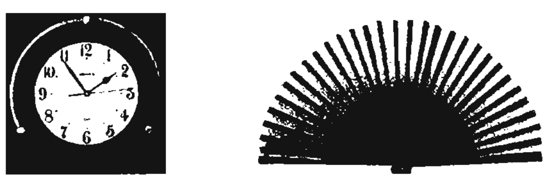
BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $A(-1 ; 3)$ và đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 3 = 0$. Tìm ảnh của A và d qua phép đối xứng tâm O.

2. Trong các hình tam giác đều, hình bình hành, ngũ giác đều, lục giác đều, hình nào có tâm đối xứng ?

3. Tìm một hình có vô số tâm đối xứng.

§5. PHÉP QUAY



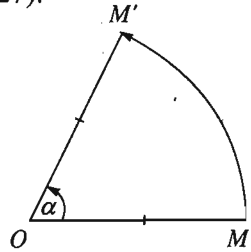
Hình 1.26

Sự dịch chuyển của những chiếc kim đồng hồ, của những bánh xe răng cưa hay động tác xoè một chiếc quạt giấy cho ta những hình ảnh về phép quay mà ta sẽ nghiên cứu trong mục này.

I. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa

Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho OM' = OM và góc lượng giác (OM; OM') bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α (h.1.27).

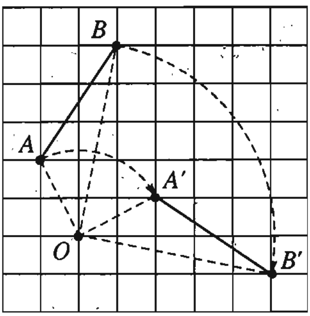


Hình 1.27

Điểm O được gọi là *tâm quay* còn α được gọi là *góc quay* của phép quay đó.

Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q_{(O,\alpha)}$.

Ví dụ 1. Trên hình 1.28 ta có các điểm A', B', O tương ứng là ảnh của các điểm A, B, O qua phép quay tâm O, góc quay $-\dfrac{\pi}{2}$.

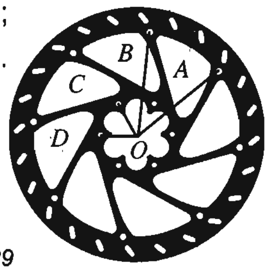


Hình 1.28

△1 Trong hình 1.29 tìm một góc quay thích hợp để phép quay tâm O

– Biến điểm A thành điểm B ;

– Biến điểm C thành điểm D.



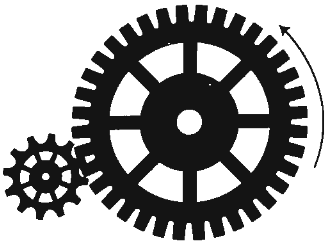
Hình 1.29

Nhận xét

1) Chiều dương của phép quay là chiều dương của đường tròn lượng giác nghĩa là chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ.



Hình 1.30



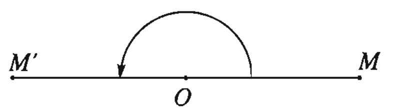
Hình 1.31

△2 Trong hình 1.31 khi bánh xe A quay theo chiều dương thì bánh xe B quay theo chiều nào ?

2) Với k là số nguyên ta luôn có

Phép quay $Q_{(O,2k\pi)}$ là phép đồng nhất.

Phép quay $Q_{(O,(2k+1)\pi)}$ là phép đối xứng tâm O (h.1.32).



Hình 1.32

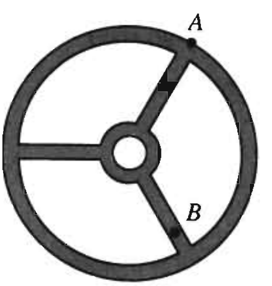
△3 Trên một chiếc đồng hồ từ lúc 12 giờ đến 15 giờ kim giờ và kim phút đã quay một góc bao nhiêu độ ?



Hình 1.33

II. TÍNH CHẤT

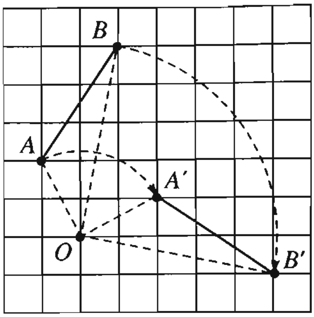
Quan sát chiếc tay lái (vô-lăng) trên tay người lái xe ta thấy khi người lái xe quay tay lái một góc nào đó thì hai điểm A và B trên tay lái cũng quay theo (h.1.34). Tuy vị trí A và B thay đổi nhưng khoảng cách giữa chúng không thay đổi. Điều đó được thể hiện trong tính chất sau của phép quay.



Hình 1.34

Tính chất 1

Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

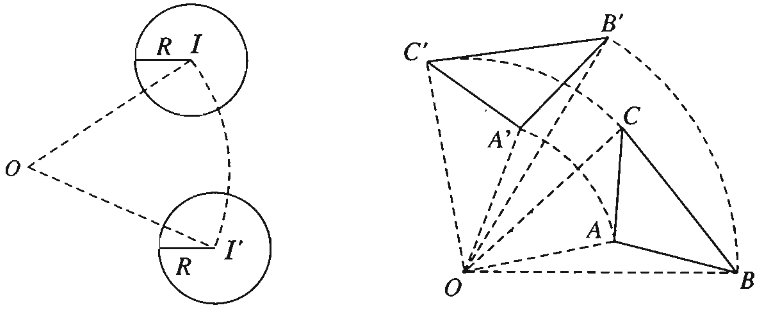


Hình 1.35

Phép quay tâm O, góc (OA ; OA') biến điểm A thành A', B thành B'. Khi đó ta có A'B' = AB.

Tính chất 2

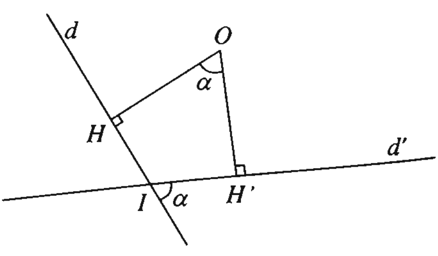
Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính (h.1.36).



Hình 1.36

Nhận xét

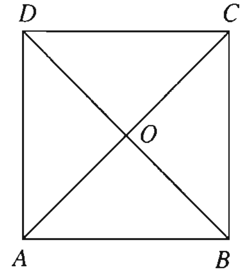
Phép quay góc α với $0 < \alpha < \pi$, biến đường thẳng d thành đường thẳng d' sao cho góc giữa d và d' bằng α (nếu $0 < \alpha \le \frac{\pi}{2}$), hoặc bằng $\pi - \alpha$ (nếu $\frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi$) (h.1.37).



Hình 1.37

4 Cho tam giác ABC và điểm O. Xác định ảnh của tam giác đó qua phép quay tâm O góc 60°

BÀI TẬP



Hình 1.38

1. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O (h.1.38).

a) Tìm ảnh của điểm C qua phép quay tâm A góc 90^o

b) Tìm ảnh của đường thẳng BC qua phép quay tâm O góc 90^o

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $A(2\ ;\ 0)$ và đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Tìm ảnh của A và d qua phép quay tâm O góc 90^o.

§6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

I. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH

Các phép tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều có một tính chất chung là bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì. Người ta dùng tính chất đó để định nghĩa phép biến hình sau đây.

> **Định nghĩa**
>
> *Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.*

Nếu phép dời hình F biến các điểm M, N lần lượt thành các điểm M', N' thì $MN = M'N'$.

Nhận xét

1) Các phép đồng nhất, tịnh tiến, đối xứng trục, đối xứng tâm và phép quay đều là những phép dời hình.

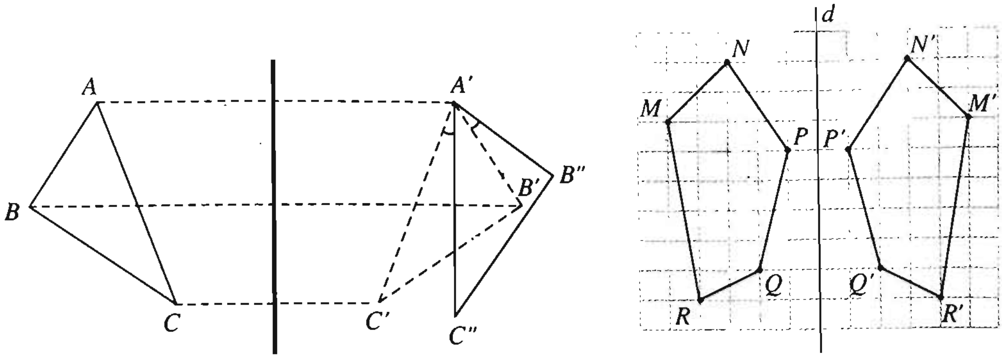
2) Phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình cũng là một phép dời hình.

Ví dụ 1

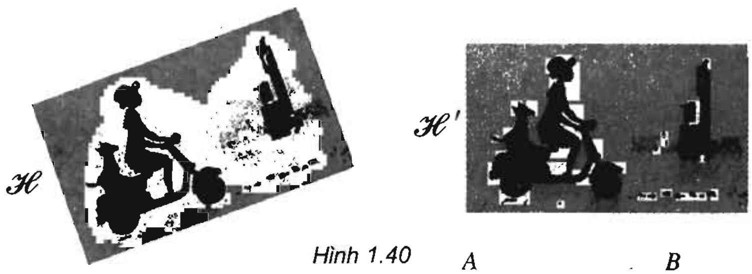
a) Tam giác $A'B''C''$ là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình (h.1.39a).

b) Ngũ giác $MNPQR$ là ảnh của ngũ giác $M'N'P'Q'R'$ qua phép dời hình (h.1.39b).

c) Hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua phép dời hình (h.1.40).

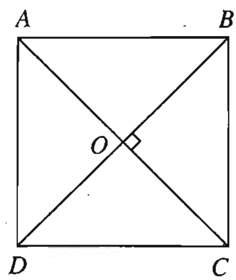


Hình 1.39



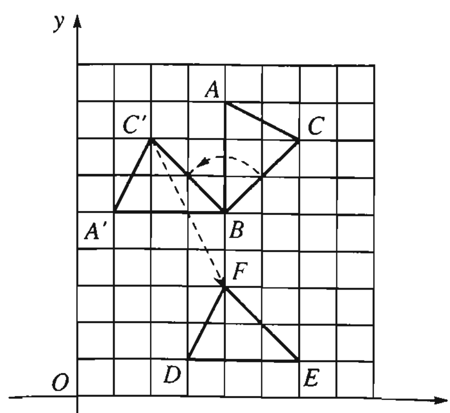
Hình 1.40

△1 Cho hình vuông $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Tìm ảnh của các điểm A, B, O qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc 90° và phép đối xứng qua đường thẳng BD (h.1.41).



Hình 1.41

Ví dụ 2. Trong hình 1.42 tam giác DEF là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm B góc 90° và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{C'F} = (2\,;-4)$.



Hình 1.42

II. TÍNH CHẤT

Phép dời hình :

1) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ;

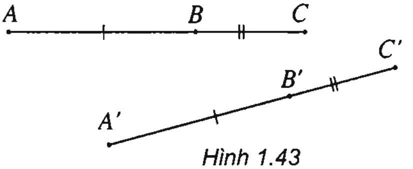
2) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó ;

3) Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó .

4) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

△2 Hãy chứng minh tính chất 1.

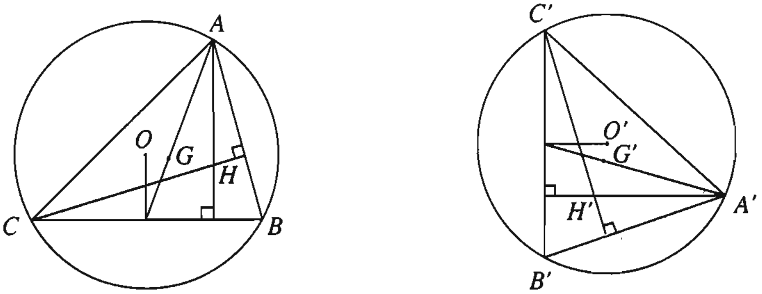
Gợi ý. Sử dụng tính chất điểm B nằm giữa hai điểm A và C khi và chỉ khi $AB + BC = AC$ (h.1.43).



Hình 1.43

△3 Gọi A', B' lần lượt là ảnh của A, B qua phép dời hình F. Chứng minh rằng nếu M là trung điểm của AB thì $M' = F(M)$ là trung điểm của $A'B'$.

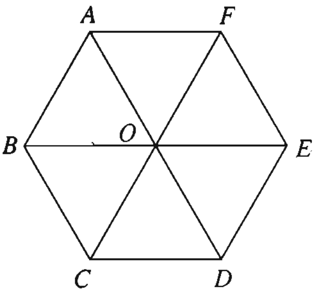
☞ **Chú ý.** a) *Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ thì nó cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác $A'B'C'$* (h.1.44).



Hình 1.44

b) *Phép dời hình biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, biến cạnh thành cạnh.*

Ví dụ 3. Cho lục giác đều $ABCDEF$, O là tâm đường tròn ngoại tiếp của nó (h.1.45). Tìm ảnh của tam giác OAB qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc 60° và phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OE}$.

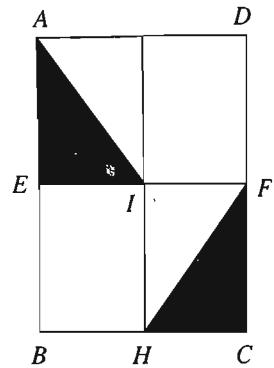


Hình 1.45

Giải

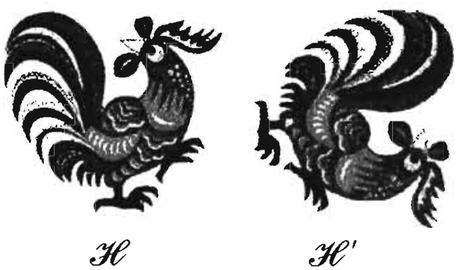
Gọi phép dời hình đã cho là F. Chỉ cần xác định ảnh của các đỉnh của tam giác OAB qua phép dời hình F Ta có phép quay tâm O, góc 60^o biến O, A và B lần lượt thành O, B và C. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OE}$ biến O, B và C lần lượt thành E, O và D. Từ đó suy ra $F(O) = E$, $F(A) = O$, $F(B) = D$. Vậy ảnh của tam giác OAB qua phép dời hình F là tam giác EOD.

△4 Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F. H, I theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, CD, BC, EF. Hãy tìm một phép dời hình biến tam giác AEI thành tam giác FCH (h.1.46).



Hình 1.46

III. KHÁI NIỆM HAI HÌNH BẰNG NHAU



Hình 1.47

Quan sát hình hai con gà trong tranh dân gian (h.1.47), vì sao có thể nói hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ bằng nhau ?

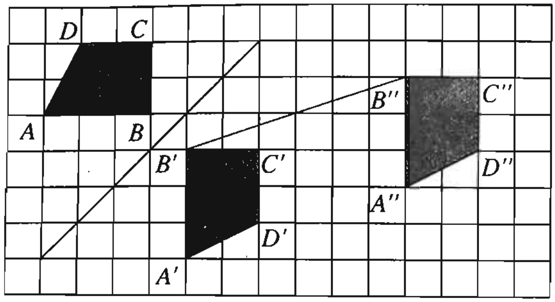
Chúng ta đã biết phép dời hình biến một tam giác thành tam giác bằng nó. Người ta cũng chứng minh được rằng với hai tam giác bằng nhau luôn có một phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia. Vậy hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi có một phép dời hình biến tam giác này thành tam giác kia. Người ta dùng tiêu chuẩn đó để định nghĩa hai hình bằng nhau.

Định nghĩa

Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

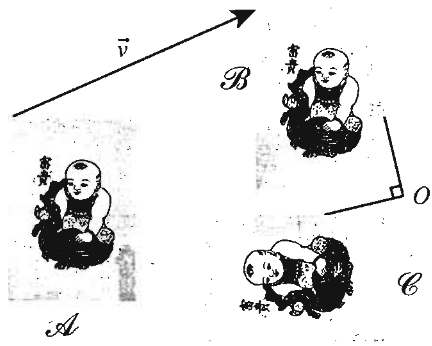
Ví dụ 4

a) Trên hình 1.48, hai hình thang $ABCD$ và $A''B''C''D''$ bằng nhau vì có một phép dời hình biến hình thang $ABCD$ thành hình thang $A''B''C''D''$.



Hình 1.48

b) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến hình $\mathscr{A}$ thành hình $\mathscr{B}$, phép quay tâm O góc 90^o biến hình $\mathscr{B}$ thành hình $\mathscr{C}$. Do đó phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ và phép quay tâm O góc 90^o biến hình $\mathscr{A}$ thành hình $\mathscr{C}$. Từ đó suy ra hai hình $\mathscr{A}$ và $\mathscr{C}$ bằng nhau (h.1.49).



Hình 1.49

△5 Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng các hình thang $AEIB$ và $CFID$ bằng nhau.

BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(-3 ; 2)$, $B(-4 ; 5)$ và $C(-1 ; 3)$.

a) Chứng minh rằng các điểm $A'(2 ; 3)$, $B'(5 ; 4)$ và $C'(3 ; 1)$ theo thứ tự là ảnh của A, B và C qua phép quay tâm O góc -90^o.

b) Gọi tam giác $A_1B_1C_1$ là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc -90^o và phép đối xứng qua trục Ox. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác $A_1B_1C_1$.

2. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi E, F, H, K, O, I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA, KF, HC, KO. Chứng minh hai hình thang $AEJK$ và $FOIC$ bằng nhau.

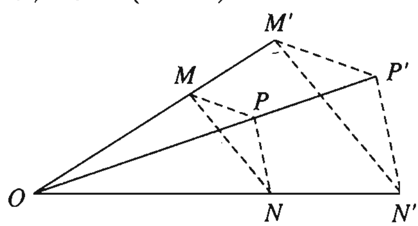
3. Chứng minh rằng : Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ thì nó cũng biến trọng tâm của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm của tam giác $A'B'C'$

§7. PHÉP VỊ TỰ

I. ĐỊNH NGHĨA

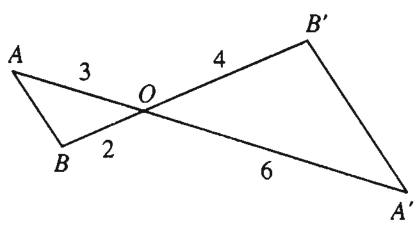
Định nghĩa

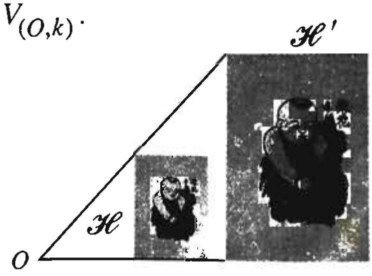
Cho điểm O và số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k (h.1.50).



Hình 1.50

Phép vị tự tâm O, tỉ số k thường được kí hiệu là $V_{(O,k)}$.





Hình 1.51

Ví dụ 1

a) Trên hình 1.51a các điểm A', B', O lần lượt là ảnh của các điểm A, B, O qua phép vị tự tâm O tỉ số -2.

b) Trong hình 1.51b phép vị tự tâm O, tỉ số 2 biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$

△1 Cho tam giác ABC. Gọi E và F tương ứng là trung điểm của AB và AC. Tìm một phép vị tự biến B và C tương ứng thành E và F.

Nhận xét

1) Phép vị tự biến tâm vị tự thành chính nó.

2) Khi $k = 1$, phép vị tự là phép đồng nhất.

3) Khi $k = -1$, phép vị tự là phép đối xứng qua tâm vị tự.

4) $M' = V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{(O,\frac{1}{k})}(M')$.

△2 Chứng minh nhận xét 4.

II. TÍNH CHẤT

Tính chất 1

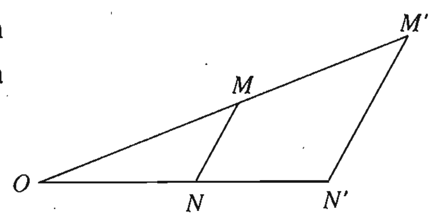
Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tuỳ ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$ *và* $M'N' = |k|.MN$.

Chứng minh

Gọi O là tâm của phép vị tự tỉ số k. Theo định nghĩa của phép vị tự ta có : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$ (h.1.52). Do đó :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{ON} - k\overrightarrow{OM}$$

$$= k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k\overrightarrow{MN}.$$



Hình 1.52

Từ đó suy ra $M'N' = |k|\, MN$.

Ví dụ 2. Gọi A', B', C' theo thứ tự là ảnh của A, B, C qua phép vị tự tỉ số k. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$, $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{A'C'}$.

Giải

Gọi O là tâm của phép vị tự tỉ số k, ta có $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{AC}$. Do đó :

$$\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \frac{1}{k}\overrightarrow{A'B'} = t\frac{1}{k}\overrightarrow{A'C'} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{A'C'}.$$

△3 Để ý rằng : điểm B nằm giữa hai điểm A và C khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$, $0 < t < 1$. Sử dụng ví dụ trên chứng minh rằng nếu điểm B nằm giữa hai điểm A và C thì điểm B' nằm giữa hai điểm A' và C'.

Tính chất 2

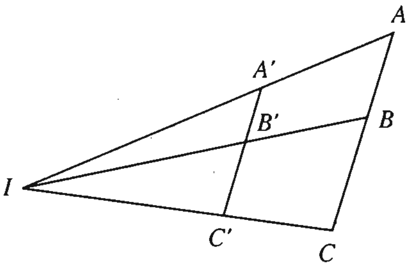
Phép vị tự tỉ số k :

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy (h.1.53).

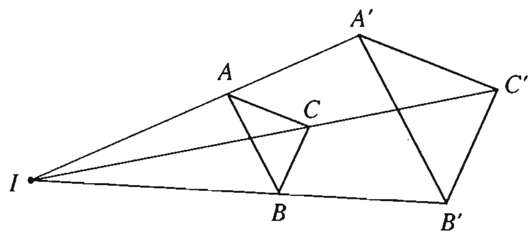
b) Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó (h.1.54).

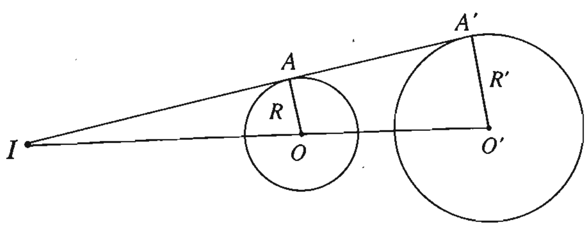
d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$ (h.1.55).



Hình 1.53

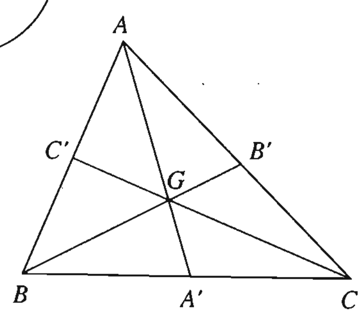


Hình 1.54



Hình 1.55

4 Cho tam giác ABC có A', B', C' theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm một phép vị tự biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ (h.1.56).

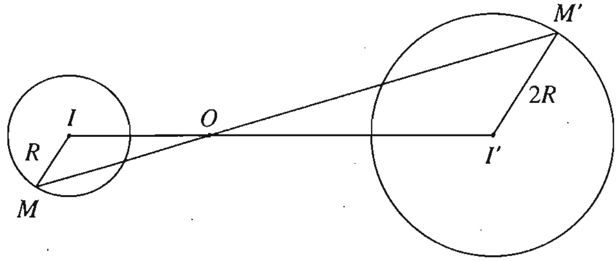


Hình 1.56

Ví dụ 3. Cho điểm O và đường tròn $(I\ ;\ R)$. Tìm ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự tâm O tỉ số -2.

Giải

Ta chỉ cần tìm $I' = V_{(O,-2)}(I)$ bằng cách lấy trên tia đối của tia OI điểm I' sao cho $OI' = 2OI$. Khi đó ảnh của $(I\,;R)$ là $(I'\,;2R)$ (h.1.57).



Hình 1.57

III. TÂM VỊ TỰ CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

Ta đã biết phép vị tự biến đường tròn thành đường tròn. Ngược lại, ta có định lí sau

> **Định lí**
>
> *Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.*

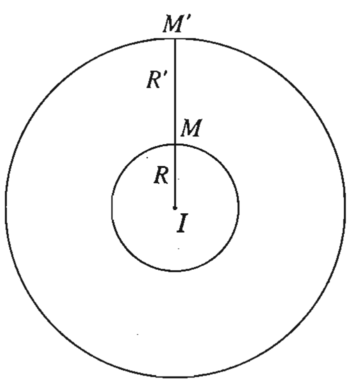
Tâm của phép vị tự đó được gọi là *tâm vị tự của hai đường tròn.*

Cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn

Cho hai đường tròn $(I\,;R)$ và $(I'\,;R')$.
Có ba trường hợp xảy ra :

- *Trường hợp I trùng với I'*

Khi đó phép vị tự tâm I tỉ số $\frac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm I tỉ số $-\frac{R'}{R}$ biến đường tròn $(I\,;R)$ thành đường tròn $(I\,;R')$ (h.1.58).

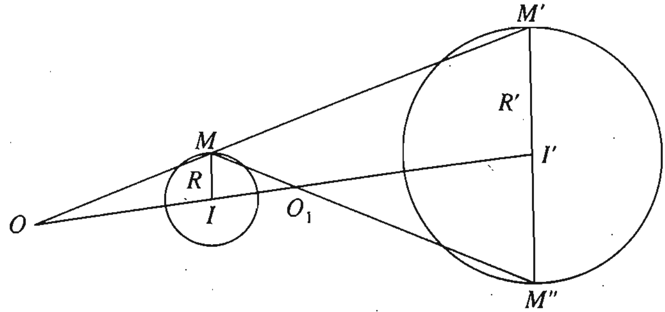


Hình 1.58

- *Trường hợp I khác I' và $R \neq R'$.*

Lấy điểm M bất kì thuộc đường tròn $(I\,;R)$, đường thẳng qua I' song song với IM cắt đường tròn $(I'\,;R')$ tại M' và M''. Giả sử M, M' nằm cùng phía đối với đường thẳng II' còn M, M'' nằm khác phía đối với đường thẳng II'. Giả sử

đường thẳng MM' cắt đường thẳng II' tại điểm O nằm ngoài đoạn thẳng II', còn đường thẳng MM'' cắt đường thẳng II' tại điểm O_1 nằm trong đoạn thẳng II' (h.1.59).

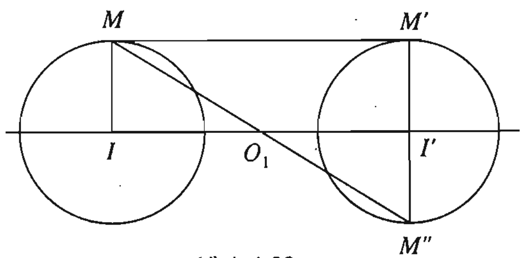


Hình 1.59

Khi đó phép vị tự tâm O tỉ số $k = \dfrac{R'}{R}$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1 = -\dfrac{R'}{R}$ sẽ biến đường tròn $(I\ ;\ R)$ thành đường tròn $(I'\ ;\ R')$. Ta gọi *O là tâm vị tự ngoài còn O_1 là tâm vị tự trong của hai đường tròn nói trên.*

• *Trường hợp I khác I' và R = R'.*

Khi đó $MM' \parallel II'$ nên chỉ có phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k = -\dfrac{R}{R} = -1$ biến đường tròn $(I\ ;\ R)$ thành đường tròn $(I'\ ;\ R')$. Nó chính là phép đối xứng tâm O_1 (h.1.60).

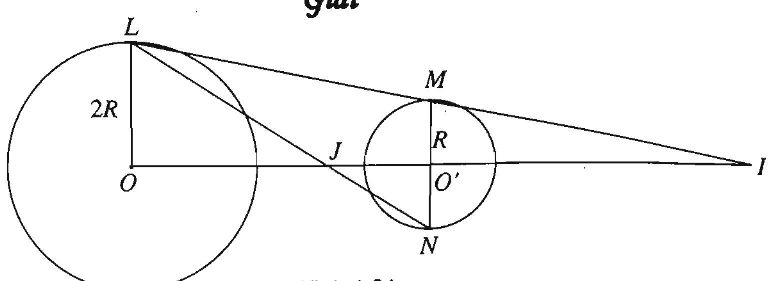


Hình 1.60

Ví dụ 4

Cho hai đường tròn $(O\ ;\ 2R)$ và $(O'\ ;\ R)$ nằm ngoài nhau. Tìm phép vị tự biến $(O\ ;\ 2R)$ thành $(O'\ ;\ R)$.

Giải



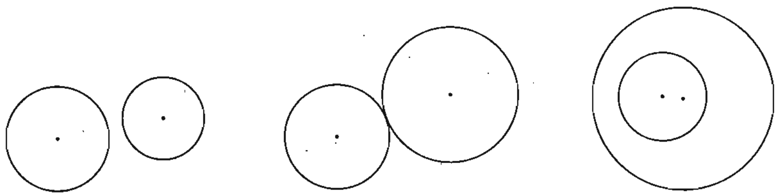
Hình 1.61

Lấy điểm L bất kì trên đường tròn $(O\ ;\ 2R)$, đường thẳng qua O', song song với OL cắt $(O'\ ;\ R)$ tại M và N (h.1.61). Hai đường thẳng LM và LN cắt đường thẳng OO' lần lượt tại I và J. Khi đó các phép vị tự $V_{\left(I, \frac{1}{2}\right)}$ và $V_{\left(J, -\frac{1}{2}\right)}$ sẽ biến $(O\ ;\ 2R)$ thành $(O'\ ;\ R)$.

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và H là trực tâm. Tìm ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm H, tỉ số $\frac{1}{2}$.

2. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn trong các trường hợp sau (h.1.62) :



a) b) c)

Hình 1.62

3. Chứng minh rằng khi thực hiện liên tiếp hai phép vị tự tâm O sẽ được một phép vị tự tâm O.

§8. PHÉP ĐỒNG DẠNG

Nhà toán học cổ Hi Lạp nổi tiếng Py-ta-go (Pythagore) từng có một câu nói được người đời nhớ mãi : "Đừng thấy bóng của mình ở trên tường rất to mà tưởng mình vĩ đại". Thật vậy, bằng cách điều chỉnh đèn chiếu và vị trí đứng thích hợp ta có thể tạo được những cái bóng của mình trên tường giống hệt nhau nhưng có kích thước to nhỏ khác nhau. Những hình có tính chất như thế gọi là những hình đồng dạng (h.1.63). Vậy thế nào là hai hình đồng dạng với nhau ? Để hiểu một cách chính xác khái niệm đó ta cần đến phép biến hình sau đây.

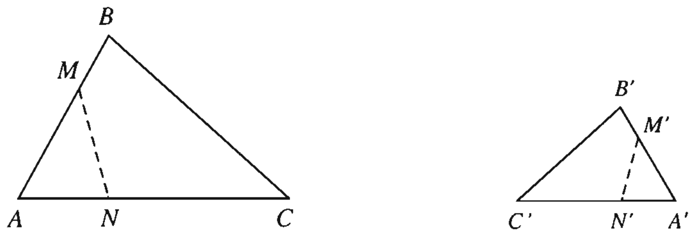


Hình 1.63

I. ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa

Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0), nếu với hai điểm M, N bất kì và ảnh M', N' tương ứng của chúng ta luôn có M'N' = kMN (h.1.64).



Hình 1.64

Nhận xét

1) Phép dời hình là phép đồng dạng tỉ số 1.

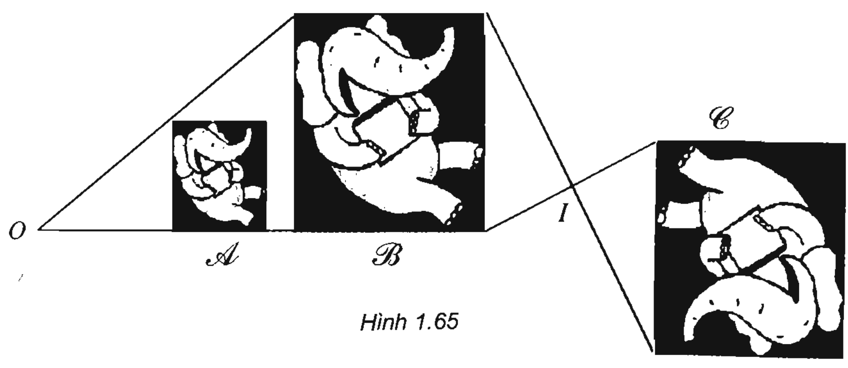
2) Phép vị tự tỉ số k là phép đồng dạng tỉ số $|k|$.

△1 Chứng minh nhận xét 2.

3) Nếu thực hiện liên tiếp phép đồng dạng tỉ số k và phép đồng dạng tỉ số p ta được phép đồng dạng tỉ số pk.

△2 Chứng minh nhận xét 3.

Ví dụ 1. Trong hình 1.65 phép vị tự tâm O tỉ số 2 biến hình $\mathscr{A}$ thành hình $\mathscr{B}$. Phép đối xứng tâm I biến hình $\mathscr{B}$ thành hình $\mathscr{C}$. Từ đó suy ra phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình trên sẽ biến hình $\mathscr{A}$ thành hình $\mathscr{C}$.



Hình 1.65

II. TÍNH CHẤT

Tính chất

Phép đồng dạng tỉ số k :

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.

b) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

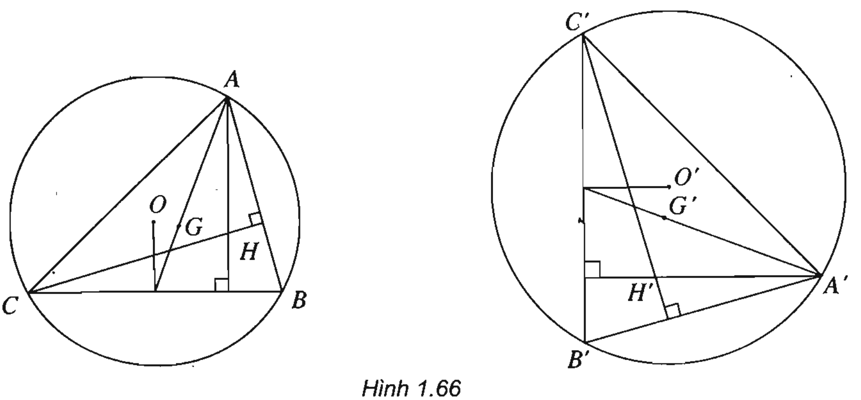
c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính kR.

△3 Chứng minh tính chất a.

△4 Gọi A', B' lần lượt là ảnh của A, B qua phép đồng dạng F. tỉ số k. Chứng minh rằng nếu M là trung điểm của AB thì $M' = F(M)$ là trung điểm của $A'B'$

☞ **Chú ý.** a) *Nếu một phép đồng dạng biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì nó cũng biến trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm, trực tâm, tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác A'B'C'* (h.1.66).



Hình 1.66

b) *Phép đồng dạng biến đa giác n cạnh thành đa giác n cạnh, biến đỉnh thành đỉnh, biến cạnh thành cạnh.*

III. HÌNH ĐỒNG DẠNG

Chúng ta đã biết phép đồng dạng biến một tam giác thành tam giác đồng dạng với nó. Người ta cũng chứng minh được rằng cho hai tam giác đồng

dạng với nhau thì luôn có một phép đồng dạng biến tam giác này thành tam giác kia. Vậy hai tam giác đồng dạng với nhau khi và chỉ khi có một phép đồng dạng biến tam giác này thành tam giác kia. Điều đó gợi cho ta cách định nghĩa các hình đồng dạng.

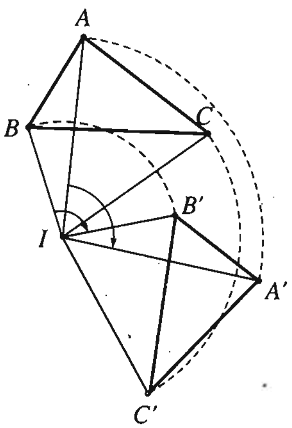
Định nghĩa

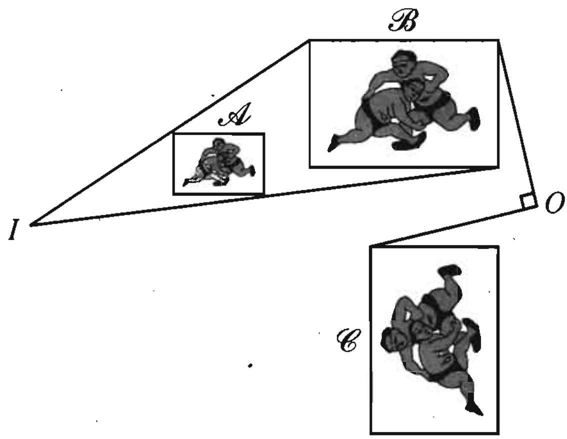
Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

Ví dụ 2

a) Tam giác $A'B'C'$ là hình đồng dạng của tam giác ABC (h.1.67a).

b) Phép vị tự tâm I tỉ số 2 biến hình $\mathscr{A}$ thành hình $\mathscr{B}$, phép quay tâm O góc 90° biến hình $\mathscr{B}$ thành hình $\mathscr{C}$. Do đó phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình trên sẽ biến hình $\mathscr{A}$ thành hình $\mathscr{C}$. Từ đó suy ra hai hình $\mathscr{A}$ và $\mathscr{C}$ đồng dạng với nhau (h.1.67b).





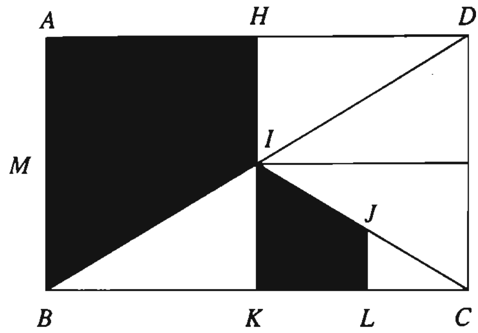
Hình 1.67

Ví dụ 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$, AC và BD cắt nhau tại I. Gọi H, K, L và J lần lượt là trung điểm của AD, BC, KC và IC. Chứng minh hai hình thang $JLKI$ và $IHAB$ đồng dạng với nhau.

Giải

Gọi M là trung điểm của AB (h.1.68). Phép vị tự tâm C, tỉ số 2 biến hình thang $JLKI$ thành hình thang $IKBA$. Phép đối xứng qua đường thẳng IM biến hình thang $IKBA$ thành hình thang $IHAB$. Do đó phép đồng dạng có được

bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép biến hình trên biến hình thang $JLKI$ thành hình thang $IHAB$. Từ đó suy ra hai hình thang $JLKI$ và $IHAB$ đồng dạng với nhau.



Hình 1.68

△5 Hai đường tròn (hai hình vuông, hai hình chữ nhật) bất kì có đồng dạng với nhau không ?

BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC. Xác định ảnh của nó qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{1}{2}$ và phép đối xứng qua đường trung trực của BC.

2. Cho hình chữ nhật $ABCD$, AC và BD cắt nhau tại I. Gọi H, K, L và J lần lượt là trung điểm của AD, BC, KC và IC. Chứng minh hai hình thang $JLKI$ và $IHDC$ đồng dạng với nhau.

3. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $I(1 ; 1)$ và đường tròn tâm I bán kính 2. Viết phương trình của đường tròn là ảnh của đường tròn trên qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc 45° và phép vị tự tâm O, tỉ số $\sqrt{2}$.

4. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao kẻ từ A. Tìm một phép đồng dạng biến tam giác HBA thành tam giác ABC.

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Thế nào là một phép biến hình, phép dời hình, phép đồng dạng ? Nêu mối liên hệ giữa phép dời hình và phép đồng dạng.

2. a) Hãy kể tên các phép dời hình đã học.

b) Phép đồng dạng có phải là phép vị tự không ?

3. Hãy nêu một số tính chất đúng đối với phép dời hình mà không đúng đối với phép đồng dạng.

4. Thế nào là hai hình bằng nhau, hai hình đồng dạng với nhau ? Cho ví dụ.

5. Cho hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng d. Hãy tìm một phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép đối xứng tâm, phép quay, phép vị tự thoả mãn một trong các tính chất sau :

   a) Biến A thành chính nó ;

   b) Biến A thành B ;

   c) Biến d thành chính nó.

6. Nêu cách tìm tâm vị tự của hai đường tròn.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Tìm ảnh của tam giác AOF

   a) Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$;

   b) Qua phép đối xứng qua đường thẳng BE ;

   c) Qua phép quay tâm O góc 120°.

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $A(-1 ; 2)$ và đường thẳng d có phương trình $3x + y + 1 = 0$. Tìm ảnh của A và d

   a) Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2 ; 1)$;

   b) Qua phép đối xứng qua trục Oy ;

   c) Qua phép đối xứng qua gốc toạ độ ;

   d) Qua phép quay tâm O góc 90°.

3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm $I(3 ; -2)$, bán kính 3.

   a) Viết phương trình của đường tròn đó.

   b) Viết phương trình ảnh của đường tròn $(I ; 3)$ qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2 ; 1)$.

   c) Viết phương trình ảnh của đường tròn $(I ; 3)$ qua phép đối xứng qua trục Ox.

   d) Viết phương trình ảnh của đường tròn $(I ; 3)$ qua phép đối xứng qua gốc toạ độ.

4. Cho vectơ $\vec{v}$, đường thẳng d vuông góc với giá của $\vec{v}$. Gọi d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\vec{v}$. Chứng minh rằng phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là kết quả của việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua các đường thẳng d và d'.

5. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi O là tâm đối xứng của nó. Gọi I, F, J, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm ảnh của tam giác AEO qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường thẳng IJ và phép vị tự tâm B, tỉ số 2.

6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm $I(1 ; -3)$, bán kính 2. Viết phương trình ảnh của đường tròn $(I ; 2)$ qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số 3 và phép đối xứng qua trục Ox.

7. Cho hai điểm A, B và đường tròn tâm O không có điểm chung với đường thẳng AB. Qua mỗi điểm M chạy trên đường tròn (O) dựng hình bình hành $MABN$. Chứng minh rằng điểm N thuộc một đường tròn xác định.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. Trong các phép biến hình sau, phép nào không phải là phép dời hình ?

(A) Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng ;

(B) Phép đồng nhất ;

(C) Phép vị tự tỉ số -1 ;

(D) Phép đối xứng trục.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó ;

(B) Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó ;

(C) Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó ;

(D) Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

3. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Để phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là vectơ nào trong các vectơ sau ?

(A) $\vec{v} = (2 ; 1)$; (B) $\vec{v} = (2 ; -1)$;

(C) $\vec{v} = (1 ; 2)$; (D) $\vec{v} = (-1 ; 2)$.

4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{v} = (2\ ;\ -1)$ và điểm $M(-3\ ;\ 2)$. Ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là điểm có toạ độ nào trong các toạ độ sau ?

(A) $(5\ ;\ 3)$; (B) $(1\ ;\ 1)$;

(C) $(-1\ ;\ 1)$; (D) $(1\ ;\ -1)$.

5. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình : $3x - 2y + 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục Ox có phương trình là :

(A) $3x + 2y + 1 = 0$; (B) $-3x + 2y + 1 = 0$;

(C) $3x + 2y - 1 = 0$; (D) $3x - 2y + 1 = 0$.

6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình : $3x - 2y - 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng tâm O có phương trình là :

(A) $3x + 2y + 1 = 0$; (B) $-3x + 2y - 1 = 0$;

(C) $3x + 2y - 1 = 0$; (D) $3x - 2y - 1 = 0$.

7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) Có một phép tịnh tiến biến mọi điểm thành chính nó ;

(B) Có một phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó ;

(C) Có một phép quay biến mọi điểm thành chính nó ;

(D) Có một phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó.

8. Hình vuông có mấy trục đối xứng ?

(A) 1 ; (B) 2 ;

(C) 4 ; (D) vô số.

9. Trong các hình sau, hình nào có vô số tâm đối xứng ?

(A) Hai đường thẳng cắt nhau ; (B) Đường elip ;

(C) Hai đường thẳng song song ; (D) Hình lục giác đều.

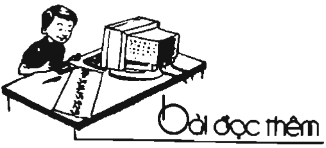
10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?

(A) Hai đường thẳng bất kì luôn đồng dạng ;

(B) Hai đường tròn bất kì luôn đồng dạng ;

(C) Hai hình vuông bất kì luôn đồng dạng ;

(D) Hai hình chữ nhật bất kì luôn đồng dạng.



Áp dụng phép biến hình để giải toán

Bài toán 1

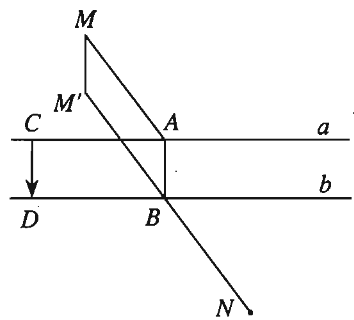
Hai thành phố M và N nằm ở hai phía của một con sông rộng có hai bờ a và b song song với nhau. M nằm phía bờ a, N nằm phía bờ b. Hãy tìm vị trí A nằm trên bờ a, B nằm trên bờ b để xây một chiếc cầu AB nối hai bờ sông đó sao cho AB vuông góc với hai bờ sông và tổng các khoảng cách $MA + BN$ ngắn nhất.

Giải

Giả sử đã tìm được các điểm A, B thoả mãn điều kiện của bài toán (h.1.69). Lấy các điểm C và D tương ứng thuộc a và b sao cho CD vuông góc với a. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CD}$ biến A thành B và biến M thành điểm M'. Khi đó $MA = M'B$. Do đó :

$MA + BN$ ngắn nhất $\Leftrightarrow$ $M'B + BN$ ngắn nhất

$\Leftrightarrow$ M', B, N thẳng hàng.



Hình 1.69

Bài toán 2

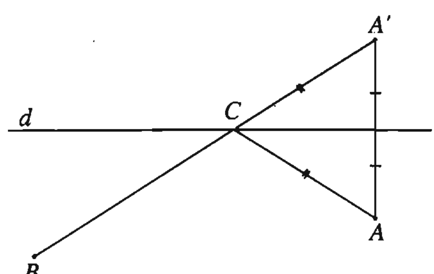
Trên một vùng đồng bằng có hai khu đô thị A và B nằm cùng về một phía đối với con đường sắt d (giả sử con đường đó thẳng). Hãy tìm một vị trí C trên d để xây dựng một nhà ga sao cho tổng các khoảng cách từ C đến trung tâm hai khu đô thị đó là ngắn nhất.

Từ bài toán thực tiễn trên ta có bài toán hình học sau :

Cho hai điểm A và B nằm về cùng một phía đối với đường thẳng d. Tìm trên d điểm C sao cho AC + CB ngắn nhất.

Giải

Giả sử đã tìm được điểm C. Gọi A' là ảnh của A qua phép đối xứng trục d.



Hình 1.70

Khi đó $AC = A'C$. Do đó :

$AC + CB$ ngắn nhất $\Leftrightarrow$ $A'C + CB$ ngắn nhất

$\Leftrightarrow$ B, C, A' thẳng hàng (h.1.70).

Bài toán 3

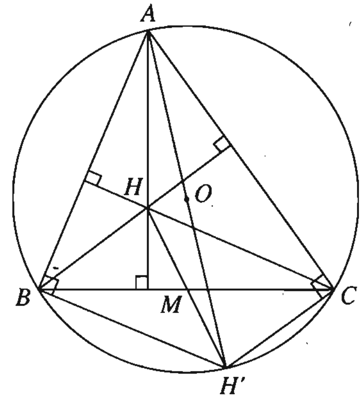
Cho tam giác ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác, M là trung điểm cạnh BC. Phép đối xứng tâm M biến H thành H'. Chứng minh rằng H' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gợi ý

– Có nhận xét gì về tứ giác $BHCH'$, góc ABH' và góc ACH' (h.1.71) ?

– Chứng minh tứ giác $ABH'C$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Cố định B và C thì M cũng cố định. Khi A chạy trên (O) thì theo bài toán 3, H' cũng chạy trên (O). Vì trực tâm H là ảnh của H' qua phép đối xứng tâm M nên khi đó H sẽ chạy trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm M.



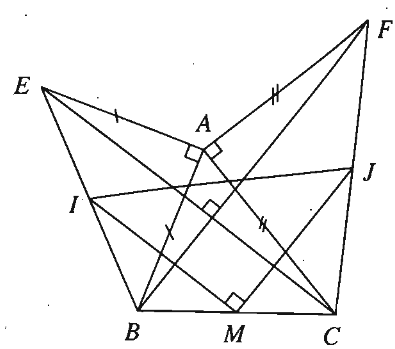
Hình 1.71

Bài toán 4

Cho tam giác ABC như hình 1.72. Dựng về phía ngoài của tam giác đó các tam giác BAE và CAF vuông cân tại A. Gọi I, M và J theo thứ tự là trung điểm của EB, BC và CF. Chứng minh rằng tam giác IMJ là tam giác vuông cân.

Giải

Xét phép quay tâm A, góc 90^o (h.1.72). Phép quay này biến E và C lần lượt thành B và F. Từ đó suy ra $EC = BF$ và $EC \perp BF$. Vì IM là đường trung bình của tam giác BEC nên $IM \parallel EC$ và $IM = \frac{1}{2}EC$. Tương



Hình 1.72

tự, $MJ \parallel BF$ và $MJ = \frac{1}{2}BF$. Từ đó suy ra $IM = MJ$ và $IM \perp MJ$. Do đó tam giác IMJ vuông cân tại M.

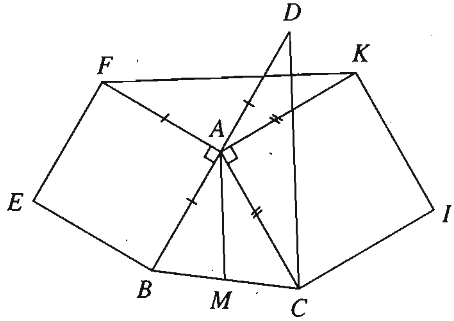
Bài toán 5

Cho tam giác ABC như hình 1.73. Dựng về phía ngoài của tam giác đó các hình vuông $ABEF$ và $ACIK$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với FK và $AM = \frac{1}{2}FK$.

Giải

Gọi D là ảnh của B qua phép đối xứng tâm A (h.1.73). Khi đó $AD = AB = AF$ và $AD \perp AF$. Phép quay tâm A góc 90^o biến đoạn thẳng DC thành đoạn thẳng FK. Do đó $DC = FK$ và $DC \perp FK$. Vì AM là đường trung bình của tam giác BCD nên $AM \parallel CD$ và $AM = \frac{1}{2}CD$.

Từ đó suy ra $AM \perp FK$ và $AM = \frac{1}{2}FK$.



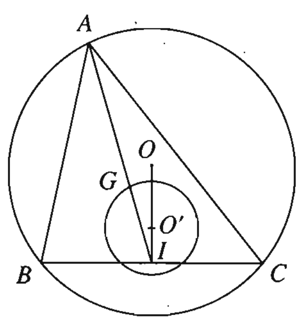
Hình 1.73

Bài toán 6

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Các đỉnh B, C cố định còn A chạy trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác ABC chạy trên một đường tròn.

Giải

Gọi I là trung điểm của BC. Do B và C cố định nên I cố định (h.1.74). Ta có G luôn thuộc IA sao cho $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$. Vậy có thể xem G là ảnh của A qua phép vị tự tâm I, tỉ số $\frac{1}{3}$. Gọi O' là ảnh của O qua phép vị tự đó, khi A chạy trên $(O\,;R)$ thì tập hợp các điểm G là đường tròn $\left(O'\,;\frac{1}{3}R\right)$ là ảnh của $(O\,;R)$ qua phép vị tự trên.

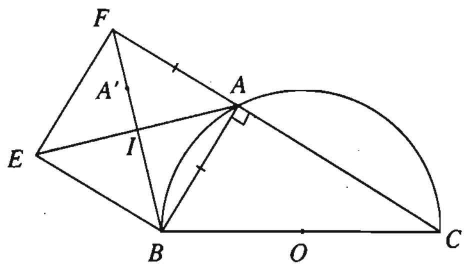


Hình 1.74

Bài toán 7

Cho điểm A nằm trên nửa đường tròn tâm O, đường kính BC như hình 1.75. Dựng về phía ngoài của tam giác ABC hình vuông $ABEF$. Gọi I là tâm đối xứng của hình vuông. Chứng minh rằng khi A chạy trên nửa đường tròn đã cho thì I chạy trên một nửa đường tròn.

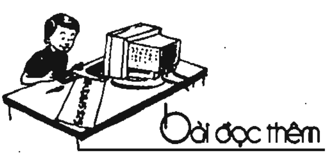
Giải



Hình 1.75

Trên đoạn BF lấy điểm A' sao cho $BA' = BA$ (h.1.75). Do góc lượng giác $(BA\ ;\ BA')$ luôn bằng 45° và $\frac{BI}{BA'} = \frac{BI}{BA} = \frac{1}{2}\frac{BF}{BA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ không đổi, nên có thể xem A' là ảnh của A qua phép quay tâm B, góc 45° ; I là ảnh của A' qua phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Do đó I là ảnh của A qua phép đồng dạng F có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm B, góc 45° và phép vị tự tâm B, tỉ số $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Từ đó suy ra khi A chạy trên nửa đường tròn (O) thì I cũng chạy trên nửa đường tròn (O') là ảnh của nửa đường tròn (O) qua phép đồng dạng F.



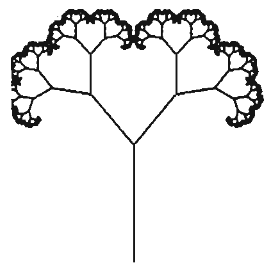
Giới thiệu về hình học frac-tan (fractal)



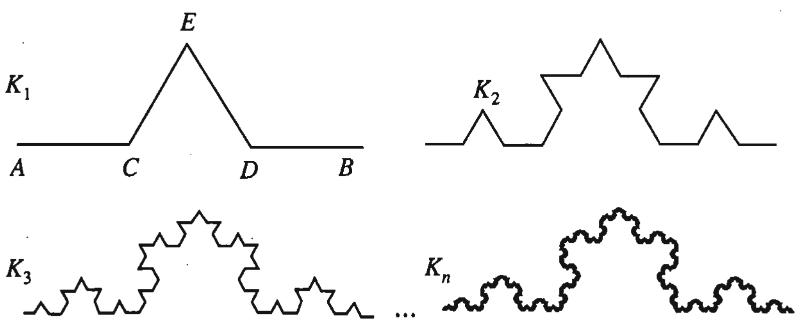
Bơ-noa Man-đen-bơ-rô (Benoit Mandelbrot – sinh năm 1924)

Quan sát cành dương xỉ hay hình vẽ bên ta thấy mỗi nhánh nhỏ của nó đều đồng dạng với hình toàn thể. Trong hình học người ta cũng gặp rất nhiều hình có tính chất như vậy. Những hình như thế gọi là những hình tự đồng dạng. Ta sẽ xét thêm một số hình sau đây.



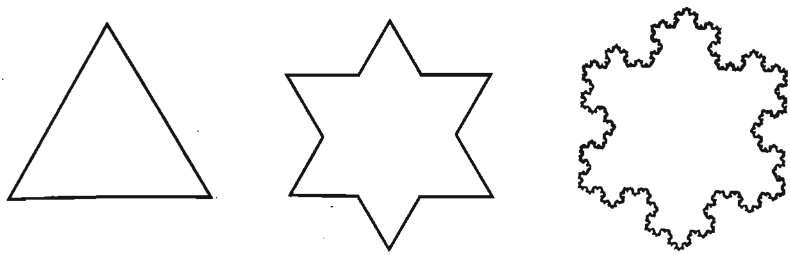


Cho đoạn thẳng AB. Chia đoạn thẳng đó thành ba đoạn bằng nhau $AC = CD = DB$. Dựng tam giác đều CED rồi bỏ đi khoảng CD. Ta sẽ được đường gấp khúc $ACEDB$ kí hiệu là K_1. Việc thay đoạn AB bằng đường gấp khúc $ACEDB$ gọi là một quy tắc sinh. Lặp lại quy tắc sinh đó cho các đoạn thẳng AC, CE, ED, DB ta được đường gấp khúc K_2. Lặp lại quy tắc sinh đó cho các đoạn thẳng của đường gấp khúc K_2 ta được đường gấp khúc K_3... . Lặp lại mãi quá trình đó ta được một đường gọi là đường Vôn Kốc (để ghi nhận người đầu tiên đã tìm ra nó vào năm 1904 – Nhà toán học Thuỵ Điển Helge Von Koch).



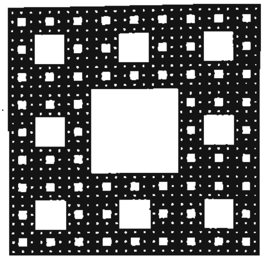
Đường Vôn Kốc

Cũng lặp lại quy tắc sinh như trên cho các cạnh của một tam giác đều ta được một hình gọi là bông tuyết Vôn Kốc.



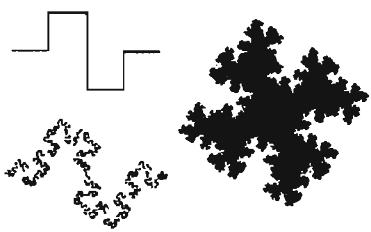
Bông tuyết Vôn Kốc

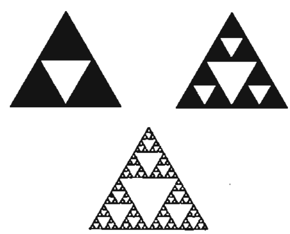
Bây giờ ta xuất phát từ một hình vuông. Chia nó thành chín hình vuông con bằng nhau rồi xoá đi phần trong của hình vuông con ở chính giữa ta được hình X_1. Ta lặp lại quá trình trên cho mỗi hình vuông con của X_1 ta sẽ được hình X_2. Tiếp tục mãi quá trình đó ta sẽ được một hình gọi là thảm Xéc-pin-xki (Sierpinski).



Các hình nêu ở trên là những hình tự đồng dạng hoặc một bộ phận của chúng là hình tự đồng dạng. Chúng được tạo ra bằng phương pháp lặp, có quy tắc sinh đơn giản nhưng sau một số bước trở thành những hình rất phức tạp. Những hình như thế gọi là các fractal (từ fractal có nghĩa là gãy, vỡ). Không phải hình tự đồng dạng nào cũng là một fractal. Một khoảng của đường thẳng cũng có thể xem là một hình tự đồng dạng nhưng không phải là một fractal.

Dưới đây là một số fractal khác.





Mặc dù các fractal đã được biết đến từ đầu thế kỉ XX, nhưng mãi đến thập niên 80 của thế kỉ XX nhà toán học Pháp gốc Ba Lan Bơ-noa Man-đen-bơ-rô (Benoit Mandelbrot) mới đưa ra một lí thuyết có hệ thống để nghiên cứu chúng. Ông gọi đó là Hình học fractal.

Ngày nay với sự hỗ trợ của công nghệ thông tin, Hình học fractal đang phát triển mạnh mẽ. Lí thuyết này có nhiều ứng dụng trong việc mô tả và nghiên cứu các cấu trúc gập gãy, lồi lõm, hỗn độn... của thế giới tự nhiên, điều mà hình học Ơ-clít thông thường chưa làm được. Nó cũng là một công cụ mới, có hiệu lực để góp phần nghiên cứu nhiều môn khoa học khác như Vật lí, Thiên văn, Địa lí, Sinh học, Xây dựng, Âm nhạc, Hội hoạ,...

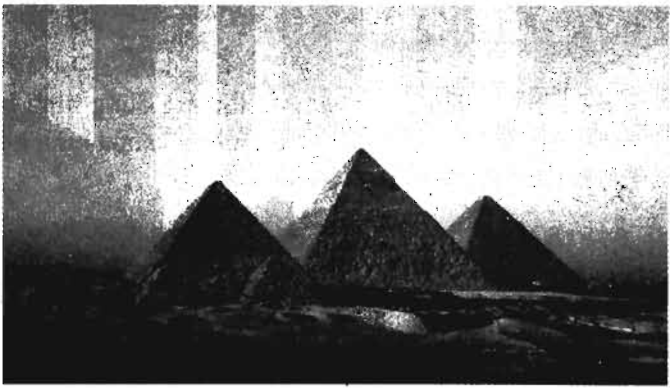
Sau đây là số hình fractal trong tự nhiên.



CHƯƠNG II

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

- **Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng**
- **Hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song**
- **Đường thẳng và mặt phẳng song song**
- **Hai mặt phẳng song song**
- **Phép chiếu song song**
  Hình biểu diễn của một hình không gian



Hình 2.1

Trước đây chúng ta đã nghiên cứu các tính chất của những hình nằm trong mặt phẳng. Môn học nghiên cứu các tính chất của hình nằm trong mặt phẳng được gọi là *Hình học phẳng.* Trong thực tế, ta thường gặp các vật như : hộp phấn, kệ sách, bàn học ... là các hình trong không gian. Môn học nghiên cứu các tính chất của các hình trong không gian được gọi là *Hình học không gian (h.2.1).*

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

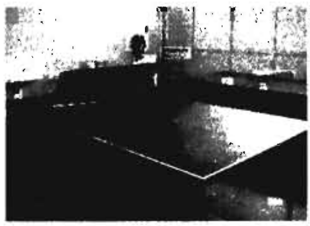
I. KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Mặt phẳng

Mặt bảng, mặt bàn, mặt nước hồ yên lặng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Mặt phẳng không có bề dày và không có giới hạn (h.2.2).



a)



b)



c)

Hình 2.2

• Để biểu diễn mặt phẳng ta thường dùng hình bình hành hay một miền góc và ghi tên của mặt phẳng vào một góc của hình biểu diễn (h.2.3).



Hình 2.3

• Để kí hiệu mặt phẳng, ta thường dùng chữ cái in hoa hoặc chữ cái Hi Lạp đặt trong dấu ngoặc ( ). Ví dụ : mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q), mặt phẳng (α), mặt phẳng (β) hoặc viết tắt là mp(P), mp(Q), mp(α), mp(β) hoặc (P), (Q), (α), (β)...

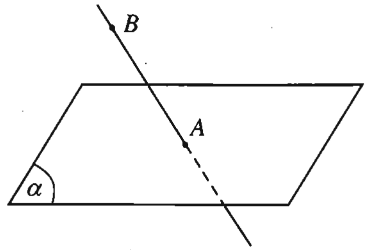
2. Điểm thuộc mặt phẳng

Cho điểm A và mặt phẳng (α).

Khi điểm A *thuộc mặt phẳng* (α) ta nói A *nằm trên* (α) hay (α) *chứa* A, hay (α) *đi qua* A và kí hiệu là $A \in (\alpha)$.

Khi điểm A *không thuộc mặt phẳng* (α) ta nói điểm A *nằm ngoài* (α) hay (α) *không chứa* A và kí hiệu là $A \notin (\alpha)$.

Hình 2.4 cho ta hình biểu diễn của điểm A thuộc mặt phẳng (α), còn điểm B không thuộc (α).

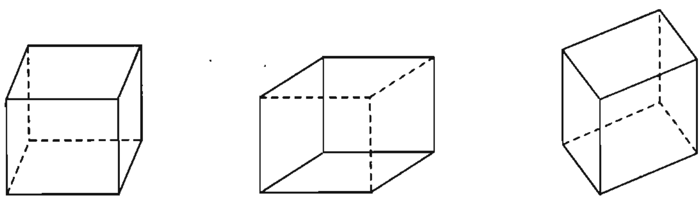


Hình 2.4

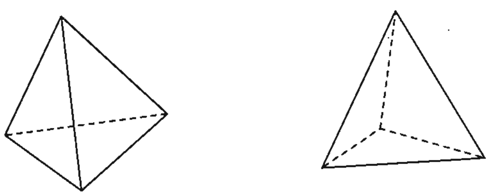
3. Hình biểu diễn của một hình không gian

Để nghiên cứu hình học không gian người ta thường vẽ các hình không gian lên bảng, lên giấy. Ta gọi hình vẽ đó là hình biểu diễn của một hình không gian.

– Ta có một vài hình biểu diễn của hình lập phương như trong hình 2.5.


Hình 2.5

– Hình 2.6 là một vài hình biểu diễn của hình chóp tam giác.


Hình 2.6

Δ1 Hãy vẽ thêm một vài hình biểu diễn của hình chóp tam giác.

Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian người ta dựa vào những quy tắc sau đây.

– Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.

– Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.

– Hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.

– Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho đường nhìn thấy và nét đứt đoạn biểu diễn cho đường bị che khuất.

Các quy tắc khác sẽ được học ở phần sau.

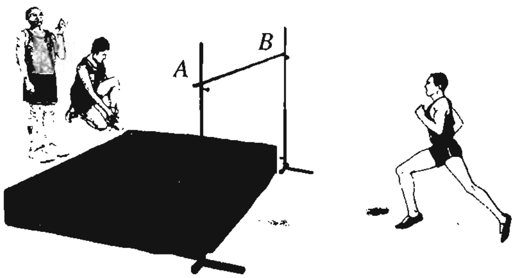
II. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Để nghiên cứu hình học không gian, từ quan sát thực tiễn và kinh nghiệm người ta thừa nhận một số tính chất sau.

Tính chất 1

Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Hình 2.7 cho thấy qua hai điểm A, B có duy nhất một đường thẳng.

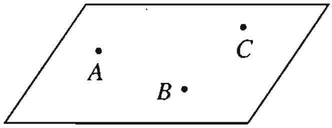


Hình 2.7

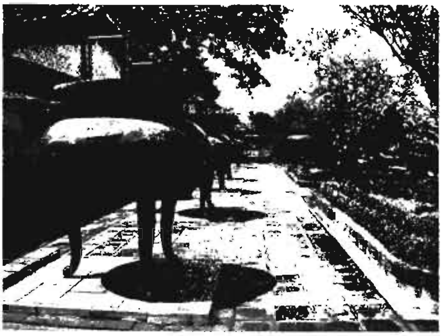
Tính chất 2

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

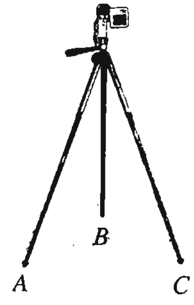
Như vậy một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng. Ta kí hiệu mặt phẳng qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C là *mặt phẳng* (ABC) hoặc mp (ABC) hoặc (ABC) (h.2.8).



Hình 2.8



Hình 2.9. Cửu Đỉnh ở Hoàng Thành, Huế



Hình 2.10

Quan sát một máy chụp hình đặt trên một giá có ba chân. Khi đặt nó lên bất kì địa hình nào nó cũng không bị gập ghềnh vì ba điểm A, B, C (h.2.10) luôn nằm trên một mặt phẳng.

Tính chất 3

Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

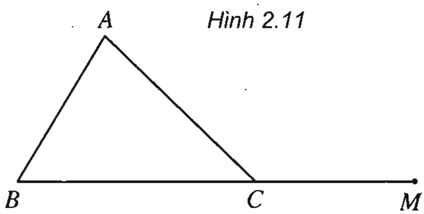
△2 Tại sao người thợ mộc kiểm tra độ phẳng mặt bàn bằng cách rê thước thẳng trên mặt bàn ? (h.2.11).



Hình 2.11

Nếu mọi điểm của đường thẳng d đều thuộc mặt phẳng (α) thì ta nói đường thẳng d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu là $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

△3 Cho tam giác ABC, M là điểm thuộc phần kéo dài của đoạn BC (h.2.12). Hãy cho biết M có thuộc mặt phẳng (ABC) không và đường thẳng AM có nằm trong mặt phẳng (ABC) không ?



Hình 2.12

Tính chất 4

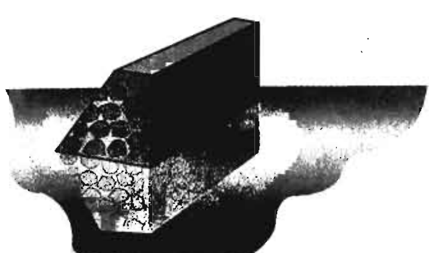
Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó *đồng phẳng*, còn nếu không có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói rằng chúng *không đồng phẳng*.

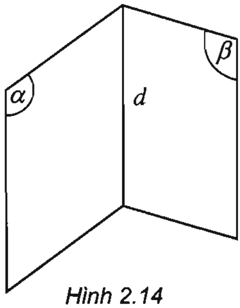
Tính chất 5

Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Từ đó suy ra : *Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy.*

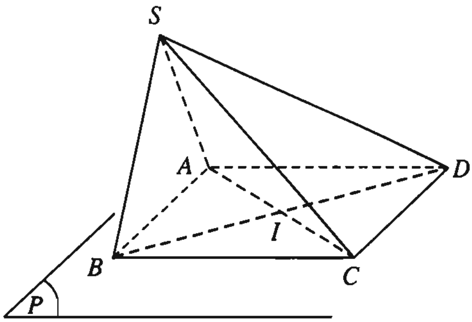


Hình 2.13. Mặt nước và thành đập giao nhau theo đường thẳng.



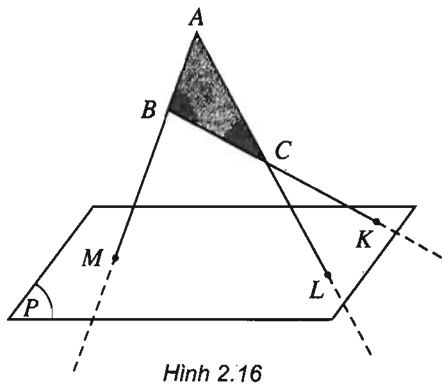
Hình 2.14

Đường thẳng chung d của hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) được gọi là *giao tuyến* của (α) và (β) và kí hiệu là $d = (\alpha) \cap (\beta)$ (h.2.14).



Hình 2.15

△4 Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P). Hãy chỉ ra một điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) khác điểm S (h.2.15).



Hình 2.16

△5 Hình 2.16 đúng hay sai ? Tại sao ?

Tính chất 6

Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

III. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG

1. Ba cách xác định mặt phẳng

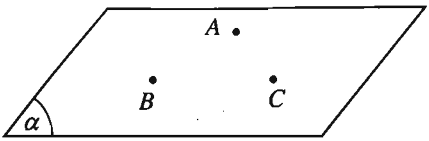
Dựa vào các tính chất được thừa nhận trên, ta có ba cách xác định một mặt phẳng sau đây.

a) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

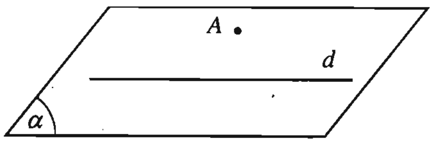
Ba điểm A, B, C không thẳng hàng xác định một mặt phẳng (h.2.17).

b) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

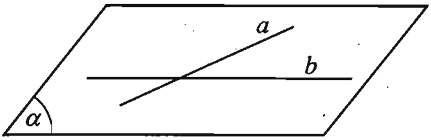
Cho đường thẳng d và điểm A không thuộc d. Khi đó điểm A và đường thẳng d xác định một mặt phẳng, kí hiệu là mp (A, d) hay (A, d), hoặc mp (d, A) hay (d, A) (h.2.18).



Hình 2.17



Hình 2.18



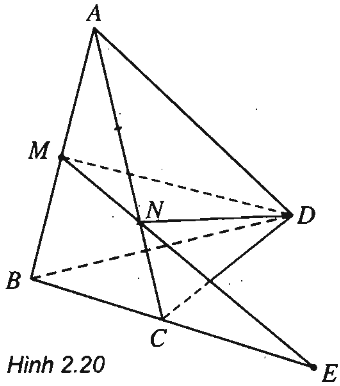
Hình 2.19

c) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b. Khi đó hai đường thẳng a và b xác định một mặt phẳng và kí hiệu là mp (a, b) hay (a, b), hoặc mp (b, a) hay (b, a) (h.2.19).

2. *Một số ví dụ*

Ví dụ 1. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Trên hai đoạn AB và AC lấy hai điểm M và N sao cho $\dfrac{AM}{BM} = 1$ và $\dfrac{AN}{NC} = 2$. Hãy xác định giao tuyến của mặt phẳng (DMN) với các mặt phẳng (ABD), (ACD), (ABC), (BCD) (h.2.20).



Hình 2.20

Giải

Điểm D và điểm M cùng thuộc hai mặt phẳng (DMN) và (ABD) nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng DM.

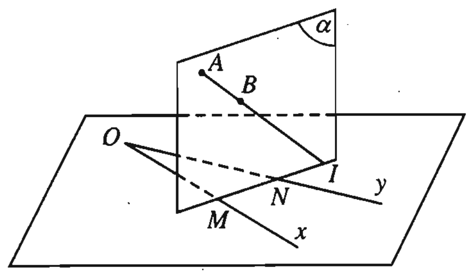
Tương tự ta có $(DMN) \cap (ACD) = DN$, $(DMN) \cap (ABC) = MN$.

Trong mặt phẳng (ABC), vì $\dfrac{AM}{MB} \neq \dfrac{AN}{NC}$ nên đường thẳng MN và BC cắt nhau tại một điểm, gọi điểm đó là E. Vì D, E cùng thuộc hai mặt phẳng (DMN) và (BCD) nên $(DMN) \cap (BCD) = DE$.

Ví dụ 2. Cho hai đường thẳng cắt nhau Ox, Oy và hai điểm A, B không nằm trong mặt phẳng (Ox, Oy). Biết rằng đường thẳng AB và mặt phẳng (Ox, Oy) có điểm chung. Một mặt phẳng (α) thay đổi luôn luôn chứa AB và cắt Ox, Oy lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định khi (α) thay đổi.

Giải

Gọi I là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (Ox, Oy) (h.2.21). Vì AB và mặt phẳng (Ox, Oy) cố định nên I cố định. Vì M, N, I là các điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (Ox, Oy) nên chúng luôn luôn thẳng hàng. Vậy đường thẳng MN luôn luôn đi qua I cố định khi (α) thay đổi.



Hình 2.21

Nhận xét. Để chứng minh ba điểm thẳng hàng ta có thể chứng minh chúng cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt.

Ví dụ 3. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Trên ba cạnh AB, AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N và K sao cho đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại H, đường thẳng NK cắt đường thẳng CD tại I, đường thẳng KM cắt đường thẳng BD tại J. Chứng minh ba điểm H, I, J thẳng hàng.

Giải

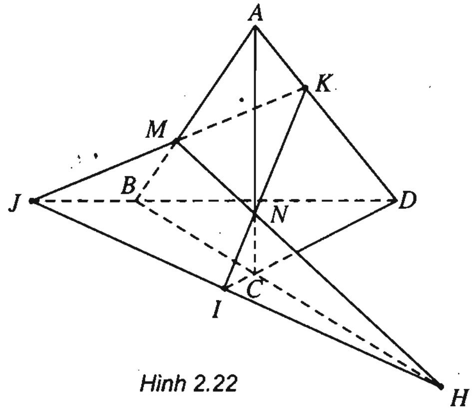
Ta có J là điểm chung của hai mặt phẳng (MNK) và (BCD) (h.2.22).

Thật vậy, ta có $\begin{cases} J \in MK \\ MK \subset (MNK) \end{cases} \Rightarrow J \in (MNK)$

và $\begin{cases} J \in BD \\ BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow J \in (BCD)$.

Lí luận tương tự ta có I, H cũng là điểm chung của hai mặt phẳng (MNK) và (BCD).

Vậy I, J, H nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (MNK) và (BCD) nên I, J, H thẳng hàng.



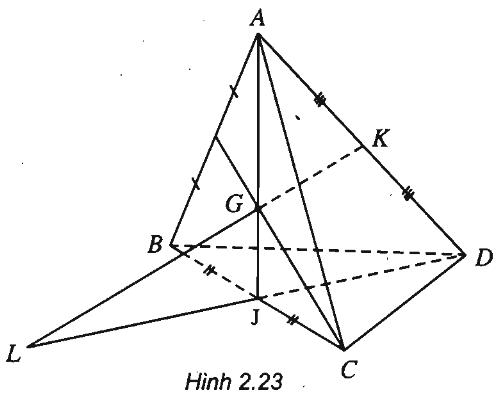
Hình 2.22

Ví dụ 4. Cho tam giác BCD và điểm A không thuộc mặt phẳng (BCD). Gọi K là trung điểm của đoạn AD và G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm giao điểm của đường thẳng GK và mặt phẳng (BCD).

Giải

Gọi J là giao điểm của AG và BC. Trong mặt phẳng (AJD), $\frac{AG}{AJ} = \frac{2}{3}$; $\frac{AK}{AD} = \frac{1}{2}$ nên GK và JD cắt nhau (h.2.23). Gọi L là giao điểm của GK và JD.

Ta có $\begin{cases} L \in JD \\ JD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow L \in (BCD)$.



Hình 2.23

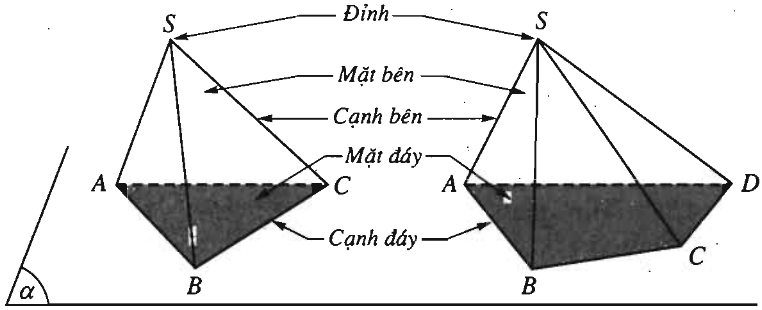
Vậy L là giao điểm của GK và (BCD).

Nhận xét. Để tìm giao điểm của một đường thẳng và một mặt phẳng ta có thể đưa về việc tìm giao điểm của đường thẳng đó với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng đã cho.

IV. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

1. Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2 \ldots A_n$. Lấy điểm S nằm ngoài (α). Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta được n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1. Hình gồm đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 gọi là *hình chóp*, kí hiệu là $S.A_1A_2 \ldots A_n$. Ta gọi S là *đỉnh* và đa giác

$A_1A_2 ... A_n$ là *mặt đáy*. Các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 được gọi là các *mặt bên* ; các đoạn SA_1, SA_2, ..., SA_n là các *cạnh bên* ; các cạnh của đa giác đáy gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp. Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... lần lượt là *hình chóp tam giác*, *hình chóp tứ giác*, *hình chóp ngũ giác*, ... (h.2.24).



Hình 2.24

2. Cho bốn điểm *A*, *B*, *C*, *D* không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác *ABC*, *ACD*, *ABD* và *BCD* gọi là *hình tứ diện* (hay ngắn gọn là *tứ diện*) và được kí hiệu là *ABCD*. Các điểm *A*, *B*, *C*, *D* gọi là các *đỉnh* của tứ diện. Các đoạn thẳng *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, *CA*, *BD* gọi là các *cạnh* của tứ diện. Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai *cạnh đối diện*. Các tam giác *ABC*, *ACD*, *ABD*, *BCD* gọi là các *mặt* của tứ diện. Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là *đỉnh đối diện* với mặt đó.

Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là *hình tứ diện đều*.

☞ ***Chú ý.*** Khi nói đến tam giác ta có thể hiểu là tập hợp các điểm thuộc các cạnh hoặc cũng có thể hiểu là tập hợp các điểm thuộc các cạnh và các điểm trong của tam giác đó. Tương tự có thể hiểu như vậy đối với đa giác.

△6 Kể tên các mặt bên, cạnh bên, cạnh đáy của hình chóp ở hình 2.24.

Ví dụ 5. Cho hình chóp *S.ABCD* đáy là hình bình hành *ABCD*. Gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là trung điểm của *AB*, *AD*, *SC*. Tìm giao điểm của mặt phẳng (*MNP*) với các cạnh của hình chóp và giao tuyến của mặt phẳng (*MNP*) với các mặt của hình chóp.

Giải

Đường thẳng *MN* cắt đường thẳng *BC*, *CD* lần lượt tại *K*, *L*.

Gọi *E* là giao điểm của *PK* và *SB*, *F* là giao điểm của *PL* và *SD* (h.2.25).

Ta có giao điểm của (*MNP*) với các cạnh *SB*, *SC*, *SD* lần lượt là *E*, *P*, *F*.

Từ đó suy ra

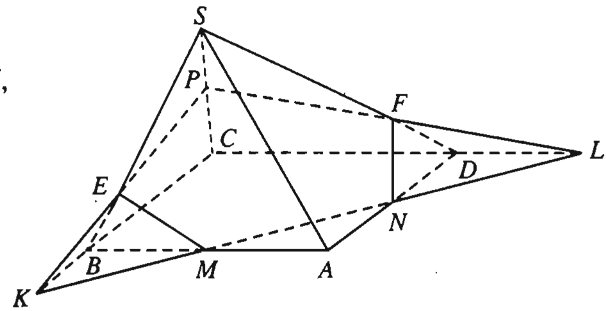
$(MNP) \cap (ABCD) = MN$,

$(MNP) \cap (SAB) = EM$,

$(MNP) \cap (SBC) = EP$,

$(MNP) \cap (SCD) = PF$

và $(MNP) \cap (SDA) = FN$.



Hình 2.25

☞ ***Chú ý.*** Đa giác $MEPFN$ có cạnh nằm trên giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$. Ta gọi đa giác $MEPFN$ là *thiết diện* (hay *mặt cắt*) của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Nói một cách đơn giản : *Thiết diện* (hay *mặt cắt*) của hình $\mathscr{H}$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) là phần chung của $\mathscr{H}$ và (α).

BÀI TẬP

1. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD. Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC.

a) Chứng minh đường thẳng EF nằm trong mặt phẳng (ABC).

b) Khi EF và BC cắt nhau tại I, chứng minh I là điểm chung của hai mặt phẳng (BCD) và (DEF).

2. Gọi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α). Chứng minh M là điểm chung của (α) với một mặt phẳng bất kì chứa d.

3. Cho ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 không cùng nằm trong một mặt phẳng và cắt nhau từng đôi một. Chứng minh ba đường thẳng trên đồng quy.

4. Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi G_A, G_B, G_C, G_D lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, ABD, ABC. Chứng minh rằng AG_A, BG_B, CG_C, DG_D đồng quy.

5. Cho tứ giác $ABCD$ nằm trong mặt phẳng (α) có hai cạnh AB và CD không song song. Gọi S là điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) và M là trung điểm đoạn SC.

a) Tìm giao điểm N của đường thẳng SD và mặt phẳng (MAB).

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

6. Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).

7. Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

b) Gọi M và N là hai điểm lần lượt lấy trên hai đoạn thẳng AB và AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, trên cạnh AD lấy điểm P không trùng với trung điểm của AD.

a) Gọi E là giao điểm của đường thẳng MP và đường thẳng BD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (PMN) và (BCD).

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (PMN) và BC.

9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$. Trong mặt phẳng đáy vẽ đường thẳng d đi qua A và không song song với các cạnh của hình bình hành, d cắt đoạn BC tại E. Gọi C' là một điểm nằm trên cạnh SC.

a) Tìm giao điểm M của CD và mặt phẳng $(C'AE)$.

b) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $(C'AE)$.

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB và CD không song song. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

a) Tìm giao điểm N của đường thẳng CD và mặt phẳng (SBM).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).

c) Tìm giao điểm I của đường thẳng BM và mặt phẳng (SAC).

d) Tìm giao điểm P của SC và mặt phẳng (ABM), từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (ABM).

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Hình 2.26 cho ta thấy hình ảnh của những đường thẳng song song, đường thẳng chéo nhau. Các khái niệm này sẽ được trình bày sau đây.



Hình 2.26

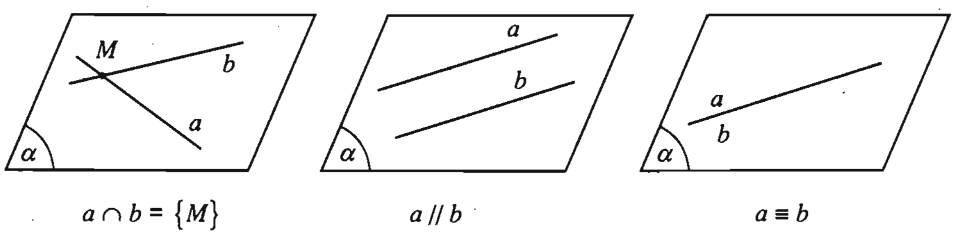
△1 Quan sát các cạnh tường trong lớp học và xem cạnh tường là hình ảnh của đường thẳng. Hãy chỉ ra một số cặp đường thẳng không thể cùng thuộc một mặt phẳng.

I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian. Khi đó có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. Có một mặt phẳng chứa a và b.

Khi đó ta nói a và b *đồng phẳng*. Theo kết quả của hình học phẳng có ba khả năng sau đây xảy ra (h.2.27).



Hình 2.27

i) a và b có điểm chung duy nhất M. Ta nói a và b *cắt nhau* tại M và kí hiệu là $a \cap b = \{M\}$. Ta còn có thể viết $a \cap b = M$.

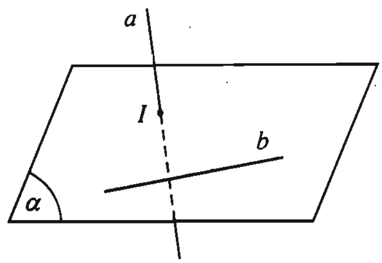
ii) a và b không có điểm chung. Ta nói a và b *song song với nhau* và kí hiệu là $a // b$.

iii) *a trùng b*, kí hiệu là $a \equiv b$.

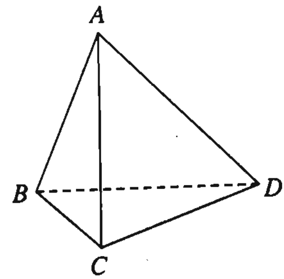
Như vậy, *hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.*

Trường hợp 2. Không có mặt phẳng nào chứa a và b.

Khi đó ta nói a và b *chéo nhau* hay *a chéo với b* (h.2.28).



Hình 2.28



Hình 2.29

△2 Cho tứ diện $ABCD$, chứng minh hai đường thẳng AB và CD chéo nhau. Chỉ ra cặp đường thẳng chéo nhau khác của tứ diện này (h.2.29).

II. TÍNH CHẤT

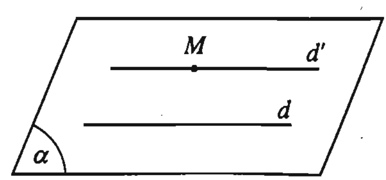
Dựa vào tiên đề Ơ-clít về đường thẳng song song trong mặt phẳng ta có các tính chất sau đây.

Định lí 1

Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

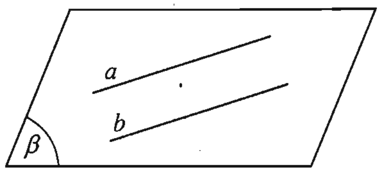
Chứng minh

Giả sử ta có điểm M và đường thẳng d không đi qua M. Khi đó điểm M và đường thẳng d xác định một mặt phẳng (α) (h.2.30). Trong mặt phẳng (α), theo tiên đề Ơ-clít về đường thẳng song song chỉ có một đường thẳng d' qua M và song song với d. Trong không gian nếu có một đường thẳng d'' đi qua M song song với d thì d'' cũng nằm trong mặt phẳng (α). Như vậy trong mặt phẳng (α) có d', d'' là hai đường thẳng cùng đi qua M và song song với d nên d', d'' trùng nhau.



Hình 2.30

Nhận xét. Hai đường thẳng song song a và b xác định một mặt phẳng, kí hiệu là mp (a, b) hay (a, b) (h.2.31).

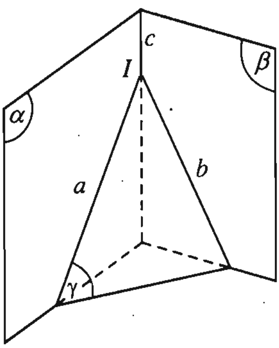


Hình 2.31

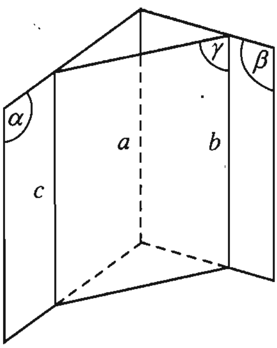
△3 Cho hai mặt phẳng (α) và (β). Một mặt phẳng (γ) cắt (α) và (β) lần lượt theo các giao tuyến a và b. Chứng minh rằng khi a và b cắt nhau tại I thì I là điểm chung của (α) và (β) (h.2.32).

Định lí 2 (về giao tuyến của ba mặt phẳng)

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau (h.2.32 và h.2.33).



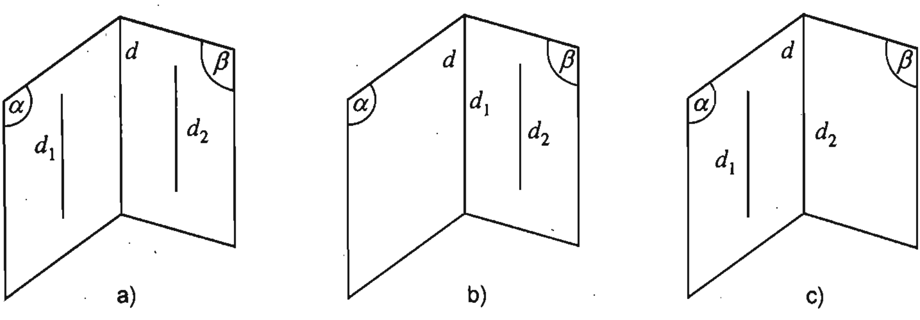
Hình 2.32



Hình 2.33

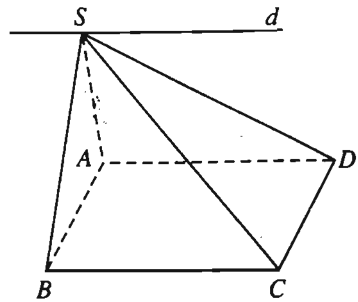
Hệ quả

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó (h.2.34a, b, c).



Hình 2.34

Ví dụ 1. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình bình hành *ABCD*. Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (*SAD*) và (*SBC*).



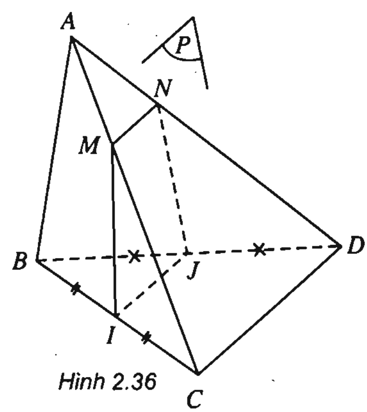
Hình 2.35

Giải

Các mặt phẳng (*SAD*) và (*SBC*) có điểm chung *S* và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là *AD*, *BC* nên giao tuyến của chúng là đường thẳng *d* đi qua *S* và song song với *AD*, *BC* (h.2.35).

Ví dụ 2. Cho tứ diện *ABCD*. Gọi *I* và *J* lần lượt là trung điểm của *BC* và *BD*. (*P*) là mặt phẳng qua *IJ* và cắt *AC*, *AD* lần lượt tại *M*, *N*. Chứng minh rằng tứ giác *IJNM* là hình thang. Nếu *M* là trung điểm của *AC* thì tứ giác *IJNM* là hình gì ?

Giải



Hình 2.36

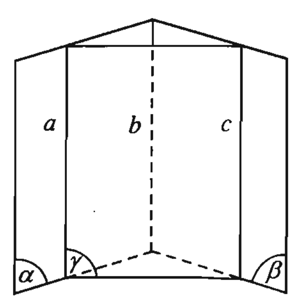
Ba mặt phẳng (*ACD*), (*BCD*), (*P*) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến *CD*, *IJ*, *MN*. Vì *IJ* // *CD* (*IJ* là đường trung bình của tam giác *BCD*) nên theo định lí 2 ta có *IJ* // *MN*. Vậy tứ giác *IJNM* là hình thang (h.2.36).

Nếu *M* là trung điểm của *AC* thì *N* là trung điểm của *AD*. Khi đó tứ giác *IJNM* có một cặp cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau nên là hình bình hành.

Trong hình học phẳng nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau. Điều này vẫn đúng trong hình học không gian.

Định lí 3

Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau (h.2.37).



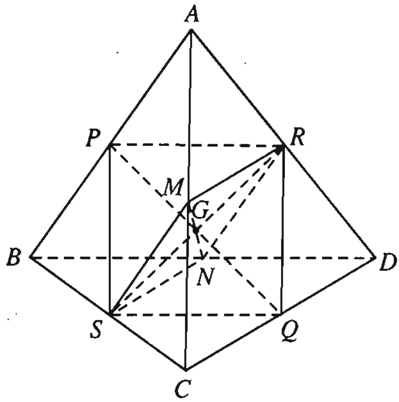
Hình 2.37

Khi hai đường thẳng *a* và *b* cùng song song với đường thẳng *c* ta kí hiệu *a* // *b* // *c* và gọi là *ba đường thẳng song song.*

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R và S lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD, AB, CD, AD và BC. Chứng minh rằng các đoạn thẳng MN, PQ, RS đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

Giải

(Xem hình 2.38)



Hình 2.38

Trong tam giác ACD ta có MR là đường trung bình nên

$$\begin{cases} MR \,//\, CD \\ MR = \frac{1}{2}CD. \end{cases} \quad (1)$$

Tương tự trong tam giác BCD, ta có

$$\begin{cases} SN \,//\, CD \\ SN = \frac{1}{2}CD. \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra $\begin{cases} MR \,//\, SN \\ MR = SN. \end{cases}$

Do đó tứ giác $MRNS$ là hình bình hành. Như vậy MN, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

Lí luận tương tự, ta có tứ giác $PRQS$ cũng là hình bình hành nên PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn. Vậy PQ, RS, MN đồng quy tại trung điểm của mỗi đoạn.

BÀI TẬP

1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q, R và S là bốn điểm lần lượt lấy trên bốn cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng nếu bốn điểm P, Q, R và S đồng phẳng thì

a) Ba đường thẳng PQ, SR và AC hoặc song song hoặc đồng quy ;

b) Ba đường thẳng PS, RQ và BD hoặc song song hoặc đồng quy.

2. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC. Tìm giao điểm S của AD và mặt phẳng (PQR) trong hai trường hợp sau đây.

a) PR song song với AC ;

b) PR cắt AC.

3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN.

a) Tìm giao điểm A' của đường thẳng AG và mặt phẳng (BCD).

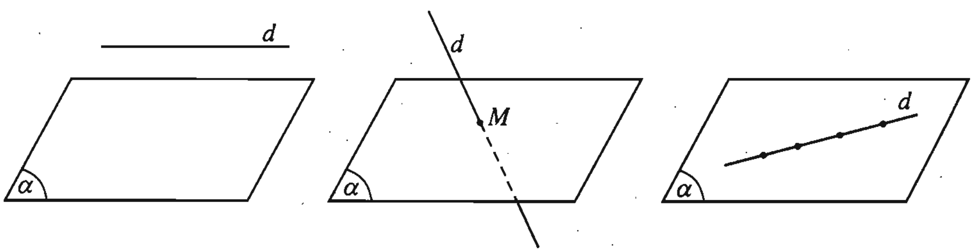
b) Qua M kẻ đường thẳng Mx song song với AA' và Mx cắt (BCD) tại M'. Chứng minh B, M', A' thẳng hàng và $BM' = M'A' = A'N$.

c) Chứng minh $GA = 3GA'$.

§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

I. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Tuỳ theo số điểm chung của d và (α), ta có ba trường hợp sau (h.2.39).



$d \,//\, (\alpha)$ $\qquad$ $d \cap (\alpha) = \{M\}$ $\qquad$ $d \subset (\alpha)$

Hình 2.39

• *d và (α) không có điểm chung*. Khi đó ta nói *d song song* với (α) hay (α) *song song* với d và kí hiệu là $d \,//\, (\alpha)$ hay $(\alpha) \,//\, d$.

• *d và (α) có một điểm chung duy nhất M*. Khi đó ta nói d và (α) *cắt nhau* tại điểm M và kí hiệu là $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.

• *d và (α) có từ hai điểm chung trở lên*. Khi đó, theo tính chất 3 §1, d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

△1 Trong phòng học hãy quan sát hình ảnh của đường thẳng song song với mặt phẳng.

II. TÍNH CHẤT

Để nhận biết đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) ta có thể căn cứ vào số giao điểm của chúng. Ngoài ra ta có thể dựa vào các dấu hiệu sau đây.

> ***Định lí 1***
>
> *Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).*

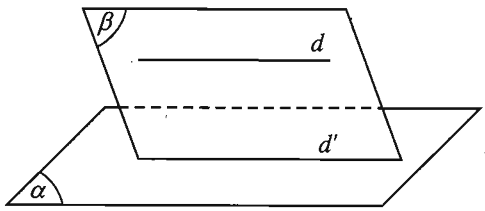
Chứng minh

Gọi (β) là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng song song d, d'.

Ta có $(\alpha) \cap (\beta) = d'$ (h.2.40).

Nếu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ thì M thuộc giao tuyến của (α) và (β) là d' hay $d \cap d' = \{M\}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $d \,//\, d'$.

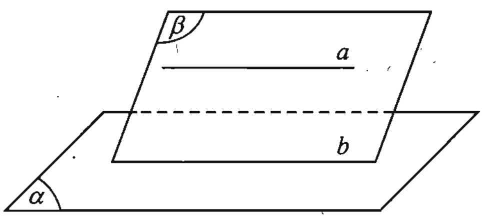
Vậy $d \,//\, (\alpha)$.



Hình 2.40

Δ2 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD. Các đường thẳng MN, NP, PM có song song với mặt phẳng (BCD) không ?

> ***Định lí 2***
>
> *Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a* (h.2.41).



Hình 2.41

Ví dụ. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M là điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với các đường thẳng AB và CD. Xác định thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$. Thiết diện đó là hình gì ?

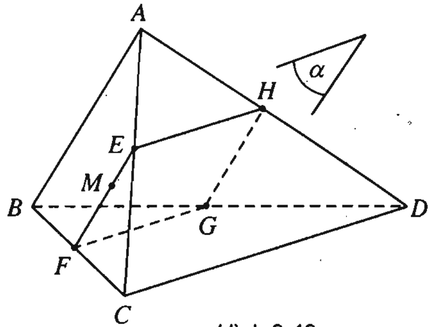
Giải

Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với AB nên (α) cắt mặt phẳng (ABC) (chứa AB) theo giao tuyến d đi qua M và song song với AB. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d với AC và BC (h.2.42).

Mặt khác, (α) song song với CD nên (α) cắt (ACD) và (BCD) (là các mặt phẳng chứa CD) theo các giao tuyến EH và FG cùng song song với CD ($H \in AD$ và $G \in BD$).

Ta có thiết diện là tứ giác $EFGH$. Hơn nữa ta có

(α) // AB và (ABD) $\cap$ (α) = HG, từ đó suy ra HG // AB.



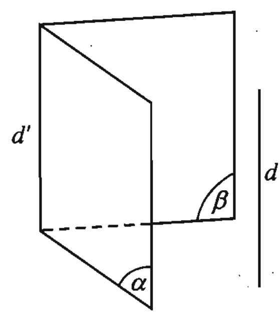
Hình 2.42

Tứ giác $EFGH$ có EF // HG (// AB) và EH // FG (// CD) nên nó là hình bình hành.

Từ định lí 2 ta suy ra hệ quả sau.

Hệ quả

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó (h.2.43).



Hình 2.43

Hai đường thẳng chéo nhau thì không thể cùng nằm trong một mặt phẳng. Tuy nhiên, ta có thể tìm được mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia. Định lí sau đây thể hiện tính chất đó.

Định lí 3

Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

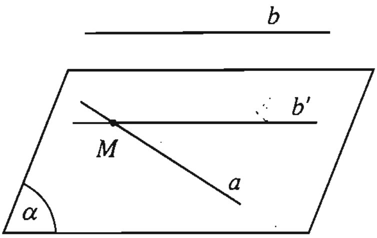
Chứng minh

Giả sử ta có hai đường thẳng chéo nhau a và b.

Lấy điểm M bất kì thuộc a. Qua M kẻ đường thẳng b' song song với b. Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi a và b' (h.2.44).

Ta có : $b \parallel b'$ và $b' \subset (\alpha)$, từ đó suy ra $b \parallel (\alpha)$.

Hơn nữa $(\alpha) \supset a$ nên (α) là mặt phẳng cần tìm.



Hình 2.44

Ta chứng minh (α) là duy nhất. Thật vậy, nếu có một mặt phẳng (β) khác (α), chứa a và song song với b thì khi đó (α), (β) là hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với b nên giao tuyến của chúng là a, phải song song với b. Điều này mâu thuẫn với giả thiết a và b chéo nhau.

Tương tự ta có thể chứng minh có duy nhất một mặt phẳng chứa b và song song với a.

BÀI TẬP

1. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O và O' lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh rằng đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABD và ABE. Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng (CEF).

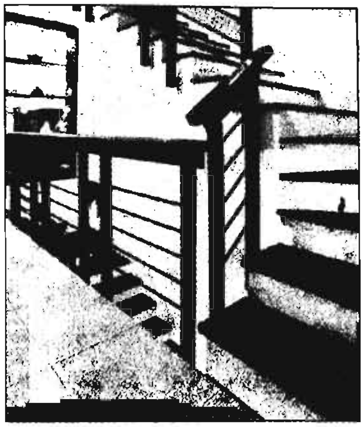
2. Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AB lấy một điểm M. Cho (α) là mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng AC và BD.

a) Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện.

b) Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì ?

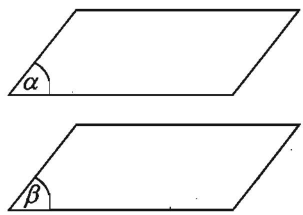
3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua O, song song với AB và SC. Thiết diện đó là hình gì ?

§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG



Hình 2.45

I. ĐỊNH NGHĨA

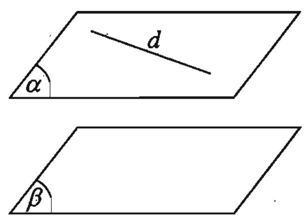


Hình 2.46

Hai mặt phẳng (α), (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Khi đó ta kí hiệu $(\alpha) // (\beta)$ hay $(\beta) // (\alpha)$ (h.2.46).

△1 Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β). Đường thẳng d nằm trong (α) (h.2.47). Hỏi d và (β) có điểm chung không ?



Hình 2.47

II. TÍNH CHẤT

Định lí 1

Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

Chứng minh

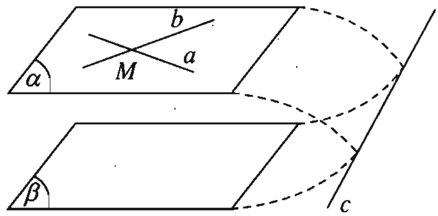
Gọi M là giao điểm của a và b.

Vì (α) chứa a mà a song song với (β) nên (α) và (β) là hai mặt phẳng phân biệt. Ta cần chứng minh (α) song song với (β).

Giả sử (α) và (β) không song song và cắt nhau theo giao tuyến c (h.2.48). Ta có

$$\begin{cases} a // (\beta) \\ (\alpha) \supset a \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \Rightarrow c // a$$

và $$\begin{cases} b // (\beta) \\ (\alpha) \supset b \\ (\alpha) \cap (\beta) = c \end{cases} \Rightarrow c // b.$$



Hình 2.48

Như vậy từ M ta kẻ được hai đường thẳng a, b cùng song song với c. Theo định lí 1, §2, điều này mâu thuẫn. Vậy (α) và (β) phải song song với nhau.

△2 Cho tứ diện $SABC$. Hãy dựng mặt phẳng (α) qua trung điểm I của đoạn SA và song song với mặt phẳng (ABC).

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ABD. Chứng minh mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ song song với mặt phẳng (BCD).

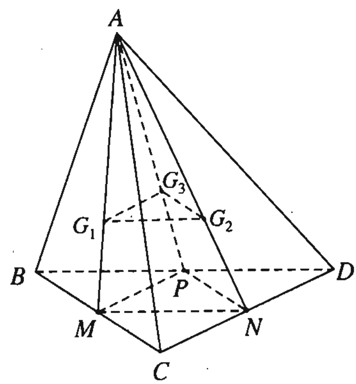
Giải

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, DB (h.2.49). Ta có :

$M \in AG_1$ và $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{2}{3}$;

$N \in AG_2$ và $\dfrac{AG_2}{AN} = \dfrac{2}{3}$;

$P \in AG_3$ và $\dfrac{AG_3}{AP} = \dfrac{2}{3}$.



Hình 2.49

Do đó $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AG_2}{AN}$ suy ra $G_1G_2 // MN$.

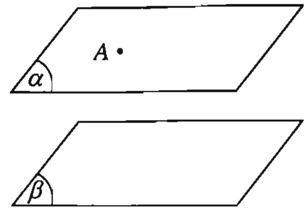
Vì MN nằm trong (BCD) nên $G_1G_2 // (BCD)$.

Tương tự $\dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AG_3}{AP}$ suy ra $G_1G_3 // MP$. Vì MP nằm trong (BCD) nên $G_1G_3 // (BCD)$. Vậy $(G_1G_2G_3) // (BCD)$.

Ta biết rằng qua một điểm không thuộc đường thẳng d có duy nhất một đường thẳng d' song song với d. Nếu thay đường thẳng d bởi mặt phẳng (α) thì được kết quả sau.

Định lí 2

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho (h.2.50).

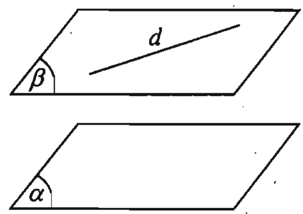


Hình 2.50

Từ định lí trên ta suy ra các hệ quả sau.

Hệ quả 1

Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) *thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với* (α) (h.2.51).



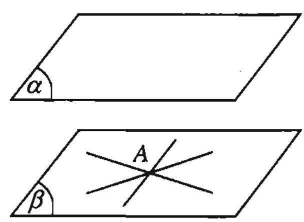
Hình 2.51

Hệ quả 2

Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Hệ quả 3

Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). *Mọi đường thẳng đi qua A và song song với* (α) *đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với* (α) (h.2.52).



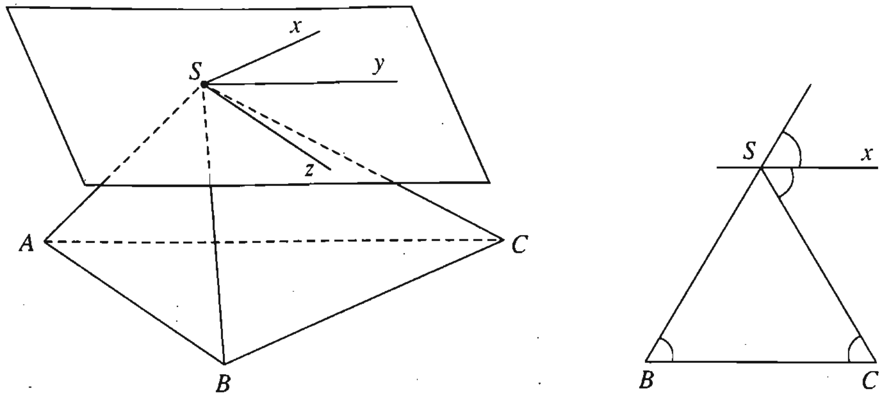
Hình 2.52

Ví dụ 2. Cho tứ diện $SABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi Sx, Sy, Sz lần lượt là phân giác ngoài của các góc S trong ba tam giác SBC, SCA, SAB. Chứng minh :

a) Mặt phẳng (Sx, Sy) song song với mặt phẳng (ABC) ;

b) Sx, Sy, Sz cùng nằm trên một mặt phẳng.

Giải



Hình 2.53

a) Trong mặt phẳng (SBC), vì Sx là phân giác ngoài của góc S trong tam giác cân SBC (h.2.53) nên Sx // BC. Từ đó suy ra Sx // (ABC). (1)

Tương tự, ta có Sy // (ABC). (2) và Sz // (ABC).

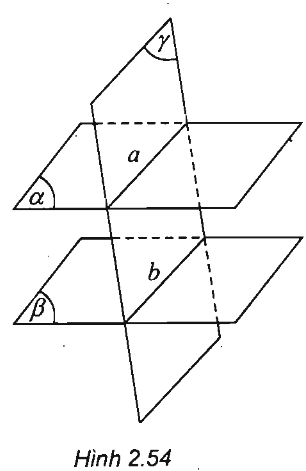
Từ (1) và (2) suy ra : (Sx, Sy) // (ABC).

b) Theo hệ quả 3, định lí 2, ta có Sx, Sy, Sz là các đường thẳng cùng đi qua S và cùng song song với (ABC) nên Sx, Sy, Sz cùng nằm trên một mặt phẳng đi qua S và song song với (ABC).

> **Định lí 3**
>
> *Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.*

Chứng minh

Gọi (α) và (β) là hai mặt phẳng song song. Giả sử (γ) cắt (α) theo giao tuyến a. Do (γ) chứa a (h.2.54) nên (γ) không thể trùng với (β). Vì vậy hoặc (γ) song song với (β) hoặc (γ) cắt (β). Nếu (γ) song song với (β) thì qua a ta có hai mặt phẳng (α) và (γ) cùng song song với (β). Điều này vô lí. Do đó (γ) phải cắt (β). Gọi giao tuyến của (γ) và (β) là b.



Hình 2.54

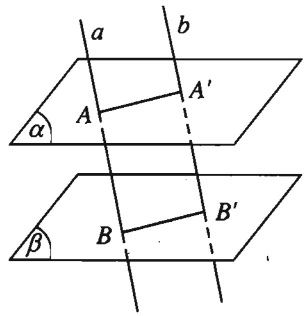
Ta có $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ mà $(\alpha) // (\beta)$ nên $a \cap b = \varnothing$. Vậy hai đường thẳng a và b cùng nằm trong một mặt phẳng (γ) và không có điểm chung nên $a // b$.

Hệ quả

Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

Chứng minh

Gọi (α) và (β) là hai mặt phẳng song song và (γ) là mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng song song a, b. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng a với (α) và (β) ; A', B' lần lượt là giao điểm của đường thẳng b với (α) và (β) (h.2.55). Theo định lí 3 ta có



Hình 2.55

$$\begin{cases}(\alpha) // (\beta)\\ (\gamma) \cap (\alpha) = AA'\\ (\gamma) \cap (\beta) = BB'.\end{cases}$$

Từ đó suy ra $AA' // BB'$.

Vì AB song song với $A'B'$ (do a song song với b) nên tứ giác $AA'B'B$ là hình bình hành.

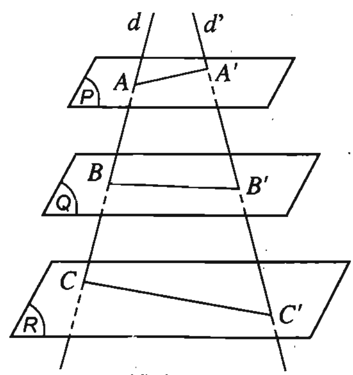
Vậy $AB = A'B'$.

III. ĐỊNH LÍ TA-LÉT (THALÈS)

△3 Phát biểu định lí Ta-lét trong hình học phẳng.

Định lí 4 (Định lí Ta-lét)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Hình 2.56

Nếu d, d' là hai cát tuyến bất kì cắt ba mặt phẳng song song (α), (β), (γ) lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C' (h.2.56) thì

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

IV. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2 \ldots A_n$. Qua các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại A'_1, A'_2, ..., A'_n.

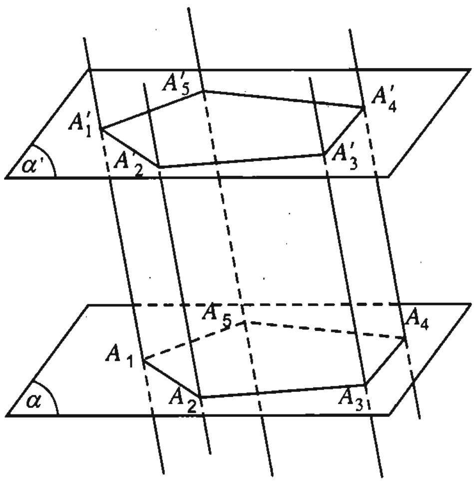
Hình gồm hai đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$, $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ và các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2$, $A_2A'_2A'_3A_3$, ..., $A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là *hình lăng trụ* và được kí hiệu là $A_1A_2 \ldots A_n.A'_1A'_2 \ldots A'_n$ (h.2.57).

– Hai đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ và $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ được gọi là hai *mặt đáy* của hình lăng trụ.

– Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$,..., $A_nA'_n$ được gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.

– Các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2$, $A_2A'_2A'_3A_3$, ..., $A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.

– Các đỉnh của hai đa giác được gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.

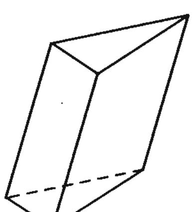


Hình 2.57

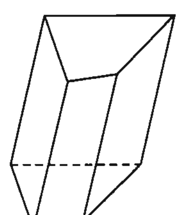
Nhận xét

- Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

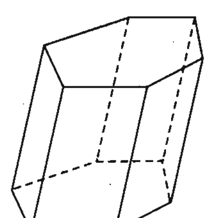
Người ta gọi tên của hình lăng trụ dựa vào tên của đa giác đáy, xem hình 2.58.



Hình lăng trụ tam giác



Hình lăng trụ tứ giác

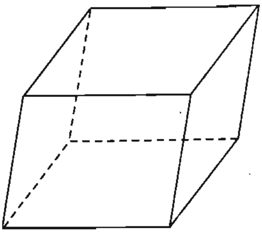


Hình lăng trụ lục giác

Hình 2.58

• Hình lăng trụ có đáy là hình tam giác được gọi là *hình lăng trụ tam giác*.

• Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp* (h.2.59).

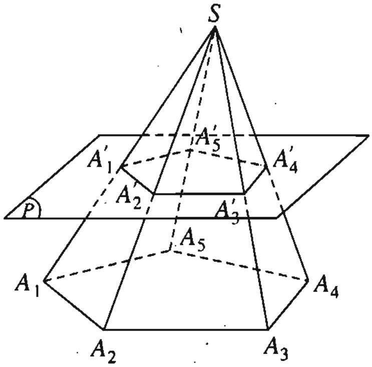


Hình 2.59

V. HÌNH CHÓP CỤT

Định nghĩa

Cho hình chóp $S.A_1A_2 \ldots A_n$; một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy của hình chóp cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n lần lượt tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ và đáy $A_1A_2 \ldots A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, ..., $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là *hình chóp cụt* (h.2.60).



Hình 2.60

Đáy của hình chóp gọi là *đáy lớn* của hình chóp cụt, còn thiết diện $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ gọi là *đáy nhỏ* của hình chóp cụt. Các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, ..., $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2, \ldots, A_nA'_n$ gọi là các *cạnh bên* của hình chóp cụt.

Tuỳ theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác ..., ta có *hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác, ...*

Vì hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp nên ta dễ dàng suy ra các tính chất sau đây của hình chóp cụt.

Tính chất

1) Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.

2) Các mặt bên là những hình thang.

3) Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng (α) cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và không nằm trên (α). Trên a, b, c lần lượt lấy ba điểm A', B', C' tuỳ ý.

a) Hãy xác định giao điểm D' của đường thẳng d với mặt phẳng $(A'B'C')$.

b) Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và $B'C'$.

a) Chứng minh rằng AM song song với $A'M'$.

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng $(AB'C')$ với đường thẳng $A'M$.

c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(BA'C')$.

d) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng $(AM'M)$.

Chứng minh G là trọng tâm của tam giác $AB'C'$.

3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BDA') và $(B'D'C)$ song song với nhau.

b) Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1 và G_2 của hai tam giác BDA' và $B'D'C$.

c) Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

d) Gọi O và I lần lượt là tâm của các hình bình hành $ABCD$ và $AA'C'C$. Xác định thiết diện của mặt phẳng $(A'IO)$ với hình hộp đã cho.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A_1 là trung điểm của cạnh SA và A_2 là trung điểm của đoạn AA_1. Gọi (α) và (β) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng $(ABCD)$ và lần lượt đi qua A_1, A_2. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_1, C_1, D_1. Mặt phẳng (β) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_2, C_2, D_2. Chứng minh :

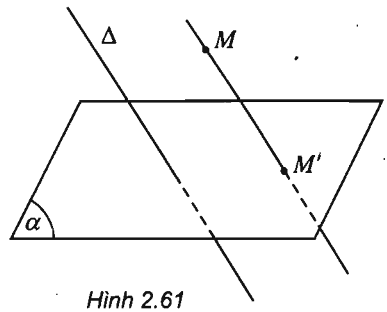
a) B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC, SD ;

b) $B_1B_2 = B_2B$, $C_1C_2 = C_2C$, $D_1D_2 = D_2D$;

c) Chỉ ra các hình chóp cụt có một đáy là tứ giác $ABCD$.

§5. PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

I. PHÉP CHIẾU SONG SONG



Hình 2.61

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α).

Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với Δ sẽ cắt (α) tại điểm M' xác định. Điểm M' được gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên mặt phẳng (α) theo phương của đường thẳng Δ hoặc nói gọn là theo phương Δ (h.2.61).

Mặt phẳng (α) gọi là *mặt phẳng chiếu*. Phương Δ gọi là *phương chiếu*.

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên mặt phẳng (α) được gọi là *phép chiếu song song lên (α) theo phương* Δ.

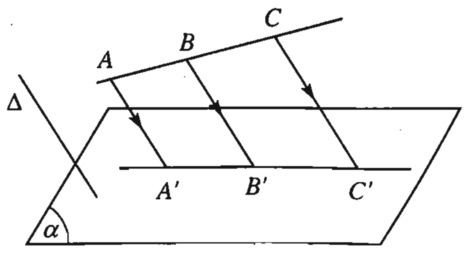
Nếu $\mathscr{H}$ là một hình nào đó thì tập hợp $\mathscr{H}'$ các hình chiếu M' của tất cả những điểm M thuộc $\mathscr{H}$ được gọi là hình chiếu của $\mathscr{H}$ qua phép chiếu song song nói trên.

☞ ***Chú ý.*** Nếu một đường thẳng có phương trùng với phương chiếu thì hình chiếu của đường thẳng đó là một điểm. Sau đây ta chỉ xét các hình chiếu của những đường thẳng có phương không trùng với phương chiếu.

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CHIẾU SONG SONG

Định lí 1

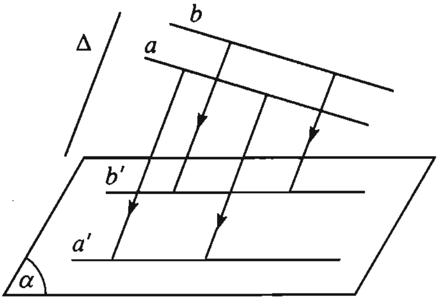
a) Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó (h.2.62).



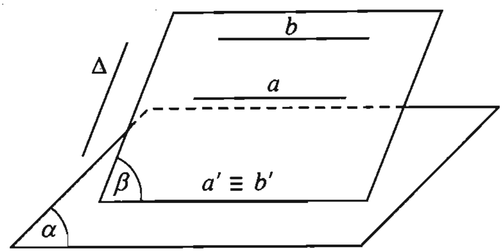
Hình 2.62

b) Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau (h.2.63 và h.2.64).

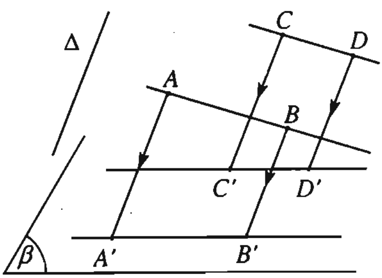


Hình 2.63



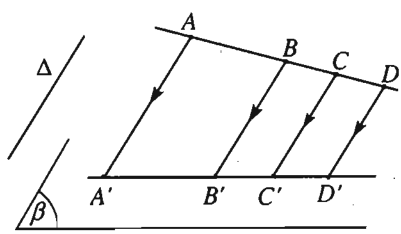
Hình 2.64

d) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng (h.2.65 và h.2.66).



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Hình 2.65

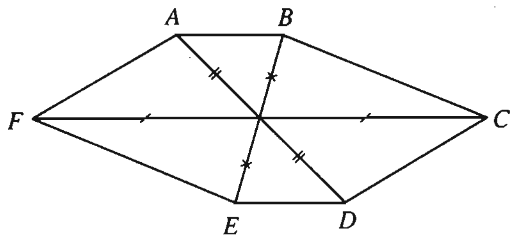


$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

Hình 2.66

△1 Hình chiếu song song của một hình vuông có thể là hình bình hành được không ?

△2 Hình 2.67 có thể là hình chiếu song song của hình lục giác đều được không ? Tại sao ?

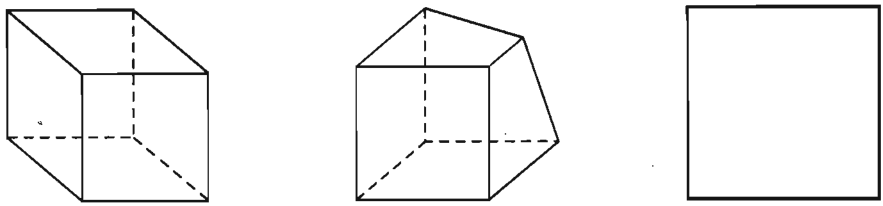


Hình 2.67

III. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN TRÊN MẶT PHẲNG

Hình biểu diễn của một hình $\mathscr{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của hình $\mathscr{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

△3 Trong các hình 2.68, hình nào biểu diễn cho hình lập phương ?

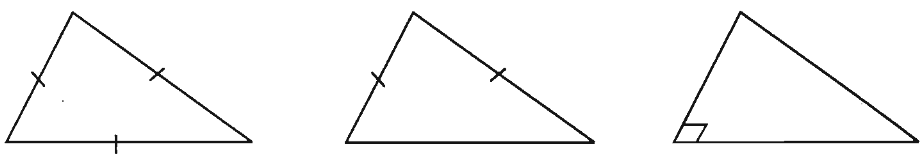


a) b) c)

Hình 2.68

Hình biểu diễn của các hình thường gặp

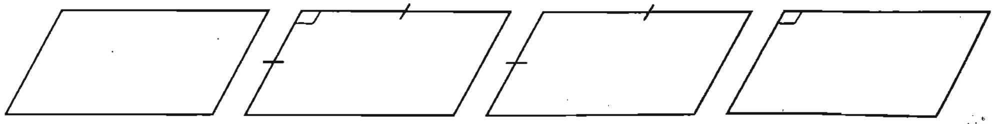
• *Tam giác.* Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tuỳ ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, v.v ...) (h.2.69).



a) b) c)

Hình 2.69

• *Hình bình hành.* Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tuỳ ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật ...) (h.2.70).

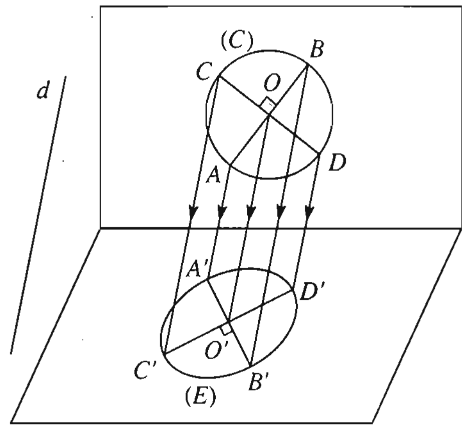


a) b) c) d)

Hình 2.70

• *Hình thang.* Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình thang tuỳ ý cho trước, miễn là tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.

• *Hình tròn.* Người ta thường dùng hình elip để biểu diễn cho hình tròn (h.2.71).



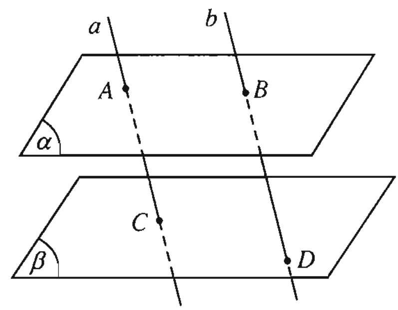
Hình 2.71

4 Các hình 2.69a, 2.69b, 2.69c là hình biểu diễn của các tam giác nào ?

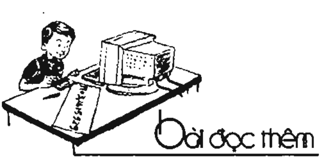
5 Các hình 2.70a, 2.70b, 2.70c, 2.70d là hình biểu diễn của các hình bình hành nào (hình bình hành, hình thoi, hình vuông, hình chữ nhật) ?

6 Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau. Đường thẳng a cắt (α) và (β) lần lượt tại A và C. Đường thẳng b song song với a cắt (α) và (β) lần lượt tại B và D.

Hình 2.72 minh hoạ nội dung nêu trên đúng hay sai ?



Hình 2.72

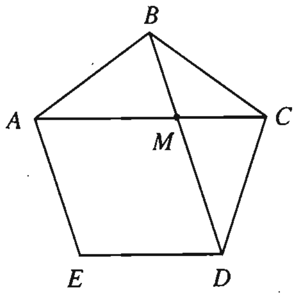


Cách biểu diễn ngũ giác đều

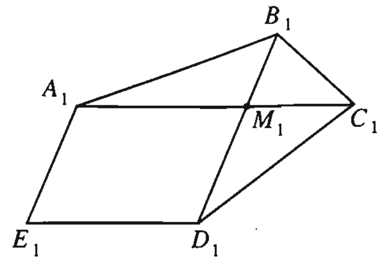
Một tam giác bất kì có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác đều. Một hình bình hành có thể coi là hình biểu diễn của một hình vuông. Đối với ngũ giác đều, hình biểu diễn như thế nào ?

Giả sử ta có ngũ giác đều $ABCDE$ với các đường chéo AC và BD cắt nhau ở điểm M (h.2.73). Ta thấy hai tam giác ABC và BMC là đồng dạng (tam giác cân có chung góc C ở đáy).

Ta có $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{BC}{MC}$. (1)



Hình 2.73



Hình 2.74

Mặt khác vì tứ giác $AMDE$ là hình thoi nên $AM = AE = BC$, do đó

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{AC}{AM}=\dfrac{AM}{MC}$

Đặt $AM = a$, $MC = x$, ta có

$$\frac{a+x}{a}=\frac{a}{x} \Leftrightarrow x^2+ax-a^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{2}(\sqrt{5}-1) \\ x=\dfrac{a}{2}(-\sqrt{5}-1) \text{ (loại).} \end{array}\right.$$

Suy ra $\dfrac{MC}{AM}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\approx\dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{BM}{MD}\approx\dfrac{2}{3}$.

Các tỉ số này giữ nguyên trên hình biểu diễn. Để xác định hình biểu diễn, ta vẽ một hình bình hành $A_1M_1D_1E_1$ bất kì làm hình biểu diễn của hình thoi $AMDE$ (h.2.74). Sau đó kéo dài cạnh A_1M_1 một đoạn $M_1C_1=\dfrac{2}{3}M_1A_1$ và kéo dài cạnh D_1M_1 thêm một đoạn $M_1B_1=\dfrac{2}{3}M_1D_1$.

Nối các điểm A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 theo thứ tự đó ta được hình biểu diễn của một ngũ giác đều.

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Hãy nêu những cách xác định mặt phẳng, kí hiệu mặt phẳng.
2. Thế nào là đường thẳng song song với đường thẳng ? Đường thẳng song song với mặt phẳng ? Mặt phẳng song song với mặt phẳng ?
3. Nêu phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng.
4. Nêu phương pháp chứng minh ba đường thẳng đồng quy.
5. Nêu phương pháp chứng minh
   – Đường thẳng song song với đường thẳng ;
   – Đường thẳng song song với mặt phẳng ;
   – Mặt phẳng song song với mặt phẳng.
6. Phát biểu định lí Ta-lét trong không gian.
7. Nêu cách xác định thiết diện tạo bởi một mặt phẳng với một hình chóp, hình hộp, hình lăng trụ.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Cho hai hình thang $ABCD$ và $ABEF$ có chung đáy lớn AB và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

   a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng sau :

   $$(AEC) \text{ và } (BFD) \text{ ; } (BCE) \text{ và } (ADF).$$

   b) Lấy M là điểm thuộc đoạn DF. Tìm giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (BCE).

   c) Chứng minh hai đường thẳng AC và BF không cắt nhau.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng SA, BC, CD. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

   Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$, hãy tìm giao điểm của đường thẳng SO với mặt phẳng (MNP).

3. Cho hình chóp đỉnh S có đáy là hình thang $ABCD$ với AB là đáy lớn. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB và SC.

   a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

c) Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AMN).

4. Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía đối với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng (β) lần lượt cắt Ax, By, Cz và Dt tại A', B', C' và D'.

a) Chứng minh mặt phẳng (Ax, By) song song với mặt phẳng (Cz, Dt).

b) Gọi $I = AC \cap BD$, $J = A'C' \cap B'D'$. Chứng minh IJ song song với AA'.

c) Cho $AA' = a$, $BB' = b$, $CC' = c$. Hãy tính DD'.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây :

(A) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa ;

(B) Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau ;

(C) Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau ;

(D) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

2. Nếu ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau thì ba đường thẳng đó

(A) Đồng quy ; (B) Tạo thành tam giác ;

(C) Trùng nhau ; (D) Cùng song song với một mặt phẳng.

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề trên.

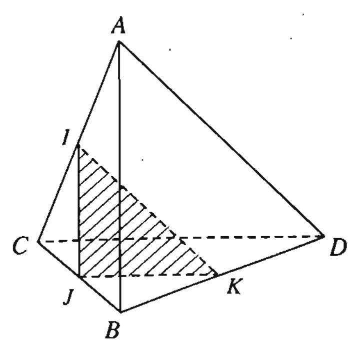
3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD (h.2.75). Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là

(A) KD ;

(B) KI ;

(C) Đường thẳng qua K và song song với AB ;

(D) Không có.



Hình 2.75

4. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β) ;

(B) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β) ;

(C) Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau ;

(D) Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

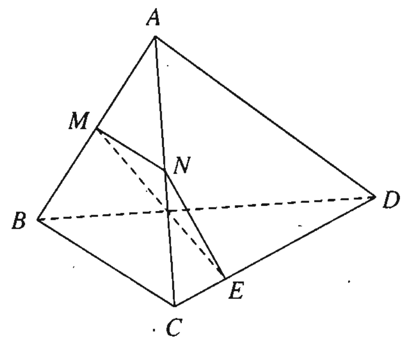
5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC (h.2.76), E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là :

(A) Tam giác MNE ;

(B) Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD ;

(C) Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$;

(D) Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF \parallel BC$.



Hình 2.76

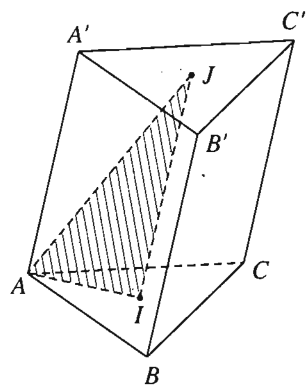
6. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$ (h.2.77). Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AIJ) với hình lăng trụ đã cho là

(A) Tam giác cân ;

(B) Tam giác vuông ;

(C) Hình thang ;

(D) Hình bình hành.



Hình 2.77

7. Cho tứ diện đều $SABC$ cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC).

Thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $SABC$ là

(A) Tam giác cân tại M ; (B) Tam giác đều ;

(C) Hình bình hành ; (D) Hình thoi.

8. Với giả thiết của bài tập 7, chu vi của thiết diện tính theo $AM = x$ là

(A) $x(1+\sqrt{3})$; (B) $2x(1+\sqrt{3})$;

(C) $3x(1+\sqrt{3})$; (D) Không tính được.

9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song với nhau lần lượt đi qua B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng đi qua A và cắt Bx, Cy, Dz lần lượt tại B', C', D' với $BB' = 2$, $DD' = 4$. Khi đó CC' bằng

(A) 3 ; (B) 4 ;

(C) 5 ; (D) 6.

10. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau ;

(B) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau ;

(C) Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau ;

(D) Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.

11. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBC).

Thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì ?

(A) Tam giác ; (B) Hình bình hành ;

(C) Hình thang ; (D) Hình vuông.

12. Với giả thiết của bài tập 11, gọi N, P, Q lần lượt là giao của mặt phẳng (α) với các đường thẳng CD, DS, SA. Tập hợp các giao điểm I của hai đường thẳng MQ và NP là

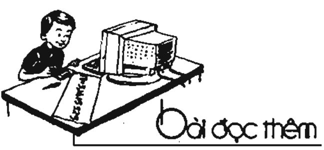
(A) Đường thẳng ; (B) Nửa đường thẳng ;

(C) Đoạn thẳng song song với AB ; (D) Tập hợp rỗng.



Ta-lét, người đầu tiên phát hiện ra nhật thực

Mọi người chúng ta đều biết đến định lí Ta-lét trong hình học phẳng và trong hình học không gian. Ta-lét là một thương gia, một người thích đi du lịch và một nhà thiên văn kiêm triết học. Ông là một nhà bác học thời cổ Hi Lạp và là người sáng lập ra trường phái triết học tự nhiên ở Mi-lét. Ông cũng được xem là thuỷ tổ của bộ môn Hình học. Trong lịch sử bộ môn Thiên văn, Ta-lét là người đầu tiên phát hiện ra nhật thực vào ngày 25 tháng 5 năm 585 trước Công nguyên. Ông đã khuyên những người đi biển xác định phương hướng bằng cách dựa vào chòm sao Tiểu Hùng Tinh.



Giới thiệu phương pháp tiên đề trong việc xây dựng hình học

Trong lúc chuyện trò, Hin-be (Hilbert) nói đùa rằng
"*Trong hình học, thay cho điểm, đường thẳng, mặt phẳng ta có thể nói về cái bàn, cái ghế và những cốc bia.*"

Từ thế kỉ thứ ba trước Công nguyên, qua tác phẩm "Cơ bản", Ơ-clít là người đầu tiên đặt nền móng cho việc áp dụng phương pháp tiên đề trong việc xây dựng hình học. Ý tưởng tuyệt vời này của Ơ-clịt đã được hoàn thiện bởi nhiều thế hệ toán học tiếp theo và mãi đến cuối thế kỉ XIX, Hin-be, nhà toán học Đức, trong tác phẩm "Cơ sở hình học" xuất bản năm 1899 đã đưa ra một hệ tiên đề ngắn, gọn, đầy đủ và không mâu thuẫn. Ngày nay có nhiều tác giả khác đưa ra những hệ tiên đề mới của hình học Ơ-clít nhưng về cơ bản vẫn dựa vào hệ tiên đề Hin-be. Sau đây chúng ta sẽ tìm hiểu sơ lược về phương pháp tiên đề.

1. Tiên đề là gì ?

Trong sách giáo khoa hình học ở trường phổ thông, chúng ta đã gặp những khái niệm đầu tiên của hình học như điểm, đường thẳng, mặt phẳng, điểm thuộc đường thẳng, điểm thuộc mặt phẳng.v.v... Các khái niệm này được mô tả bằng hình ảnh của chúng và đều không được định nghĩa. Người ta gọi đó là các *khái niệm cơ bản* và dùng chúng để định nghĩa các khái niệm khác. Hơn nữa, khi học Hình học, chúng ta còn gặp những mệnh đề toán học thừa nhận những tính chất đúng đắn đơn giản nhất của đường thẳng và mặt phẳng mà không chứng minh, đó là các *tiên đề hình học*.

Thí dụ như :

– Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước ;

– Có một và chỉ một mặt phẳng qua ba điểm không thẳng hàng cho trước ;

– Nếu có một đường thẳng đi qua hai điểm của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó ;

v. v...

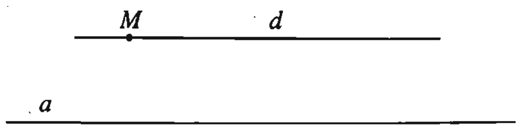
Người ta dựa vào các tiên đề Hình học để chứng minh các định lí của Hình học và xây dựng toàn bộ nội dung của nó. Một hệ tiên đề hoàn chỉnh phải thoả mãn một số điều kiện sau :

– Hệ tiên đề phải không mâu thuẫn ;

– Mỗi tiên đề của hệ phải độc lập với các tiên đề còn lại ;

– Hệ tiên đề phải đầy đủ.

2. Các lí thuyết hình học. Chúng ta biết rằng mỗi lí thuyết hình học có một hệ tiên đề riêng của nó. Riêng hình học Ơ-clít và hình học Lô-ba-sép-xki chỉ khác nhau về tiên đề song song, còn tất cả các tiên đề còn lại của hai lí thuyết hình học này đều giống nhau. Trong sách giáo khoa Hình học lớp 7, tiên đề Ơ-clít về đường thẳng song song được phát biểu như sau :



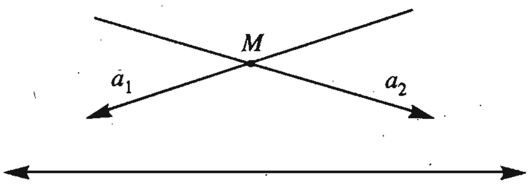
"*Qua một điểm M nằm ngoài một đường thẳng a chỉ có một đường thẳng d song song với đường thẳng a đó* ". Trong các giáo trình về cơ sở hình học, tiên đề này được gọi là tiên đề V của Ơ-clít. Suốt hơn 2000 năm người ta đã nghi

ngờ cho rằng tiên đề V là một định lí chứ không phải là một tiên đề và tìm cách chứng minh tiên đề V từ các tiên đề còn lại, nhưng tất cả đều không đi đến kết quả. Tiên đề V còn được phát biểu một cách chính xác như sau:

"Trong mặt phẳng xác định bởi đường thẳng *a* và một điểm *M* không thuộc *a* có nhiều nhất là một đường thẳng đi qua điểm *M* và không cắt *a*". Sau đó người ta đặt tên cho đường thẳng không cắt *a* nói trên là đường thẳng song song với *a*.

Lô-ba-sép-xki là người đầu tiên đặt vấn đề thay tiên đề Ơ-clít bằng tiên đề Lô-ba-sép-xki như sau :

"Trong mặt phẳng xác định bởi đường thẳng a và một điểm M không thuộc a có ít nhất hai đường thẳng đi qua M và không cắt a".

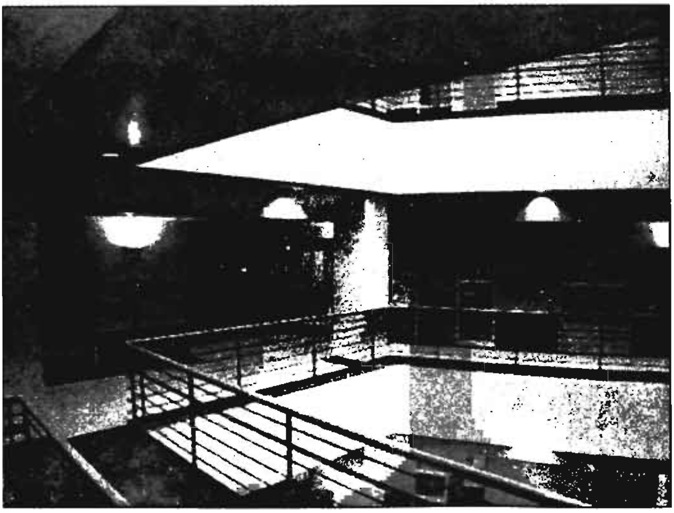


Từ tiên đề này người ta chứng minh được tổng các góc trong mỗi tam giác đều nhỏ hơn hai vuông và xây dựng nên một môn Hình học mới là *Hình học Lô-ba-sép-xki*. Ngày nay, Hình học Lô-ba-sép-xki có nhiều ứng dụng trong ngành Vật lí vũ trụ và đã tạo nên một bước ngoặt trong việc làm thay đổi tư duy khoa học của con người.

CHƯƠNG III

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

- Vectơ trong không gian
- Hai đường thẳng vuông góc
- Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng
- Hai mặt phẳng vuông góc
- Khoảng cách



Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu về vectơ trong không gian, đồng thời dựa vào các kiến thức có liên quan đến tập hợp các vectơ trong không gian để xây dựng quan hệ vuông góc của đường thẳng, mặt phẳng trong không gian.

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Ở lớp 10 chúng ta đã được học về vectơ trong mặt phẳng. Những kiến thức có liên quan đến vectơ đã giúp chúng ta làm quen với phương pháp dùng vectơ và dùng toạ độ để nghiên cứu hình học phẳng. Chúng ta biết rằng tập hợp các vectơ nằm trong mặt phẳng nào đó là một bộ phận của tập hợp các vectơ trong không gian. Do đó định nghĩa vectơ trong không gian cùng với một số nội dung có liên quan đến vectơ như độ dài của vectơ, sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ, giá của vectơ, sự bằng nhau của hai vectơ và các quy tắc thực hiện các phép toán về vectơ được xây dựng và xác định hoàn toàn tương tự như trong mặt phẳng. Tất nhiên trong không gian, chúng ta sẽ gặp những vấn đề mới về vectơ như việc xét sự đồng phẳng hoặc không đồng phẳng của ba vectơ hoặc việc phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng. Những nội dung này sẽ được xét đến trong các phần tiếp theo sau đây.

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC PHÉP TOÁN VỀ VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Cho đoạn thẳng AB trong không gian. Nếu ta chọn điểm đầu là A, điểm cuối là B ta có một vectơ, được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

1. Định nghĩa

> *Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$*

Các khái niệm có liên quan đến vectơ như giá của vectơ, độ dài của vectơ, sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ, vectơ - không, sự bằng nhau của hai vectơ, ... được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng.

△1 Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện. Các vectơ đó có cùng nằm trong một mặt phẳng không ?

△2 Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

Hãy kể tên các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$.

2. Phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian

Phép cộng và phép trừ hai vectơ trong không gian được định nghĩa tương tự như phép cộng và phép trừ hai vectơ trong mặt phẳng. Phép cộng vectơ trong

không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng. Khi thực hiện phép cộng vectơ trong không gian ta vẫn có thể áp dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành như đối với vectơ trong hình học phẳng.

Ví dụ 1. Cho tứ diện *ABCD*. Chứng minh : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Giải

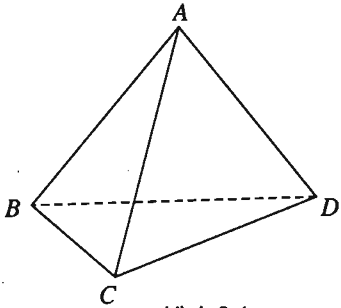
Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} \text{ (h.3.1).}$$

Do đó : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}$

$$=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})$$

$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}.$$

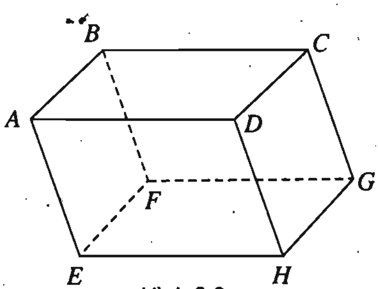


Hình 3.1

3 Cho hình hộp *ABCD.EFGH*. Hãy thực hiện các phép toán sau đây (h.3.2) :

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}$;

b) $\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CH}$.



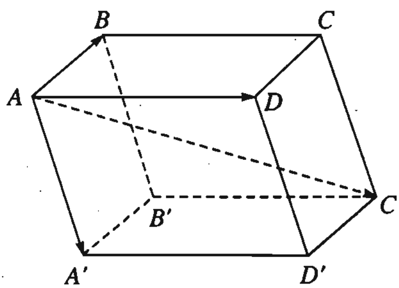
Hình 3.2

Quy tắc hình hộp

Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'* có ba cạnh xuất phát từ đỉnh *A* là *AB*, *AD*, *AA'* và có đường chéo là *AC'*. Khi đó ta có quy tắc hình hộp là :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'} \qquad \text{(h.3.3).}$$

Quy tắc này được suy ra từ quy tắc hình bình hành trong hình học phẳng.



Hình 3.3

3. Phép nhân vectơ với một số

Trong không gian, tích của vectơ $\vec{a}$ với một số $k \neq 0$ là vectơ $k\vec{a}$ được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng và có các tính chất giống như các tính chất đã được xét trong mặt phẳng.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

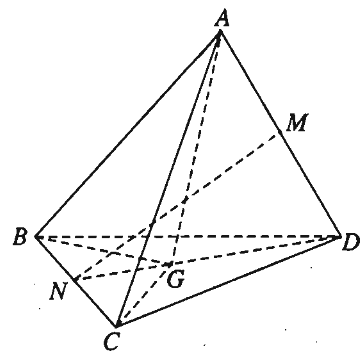
Giải

a) Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$ (h.3.4).

Do đó : $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$

Vì M là trung điểm của đoạn AD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ và N là trung điểm của đoạn BC nên $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.



Hình 3.4

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$,

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}$,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Do đó ta suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

△4 Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ - không. Hãy xác định các vectơ $\vec{m} = 2\vec{a}$, $\vec{n} = -3\vec{b}$ và $\vec{p} = \vec{m} + \vec{n}$.

II. ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẲNG CỦA BA VECTƠ

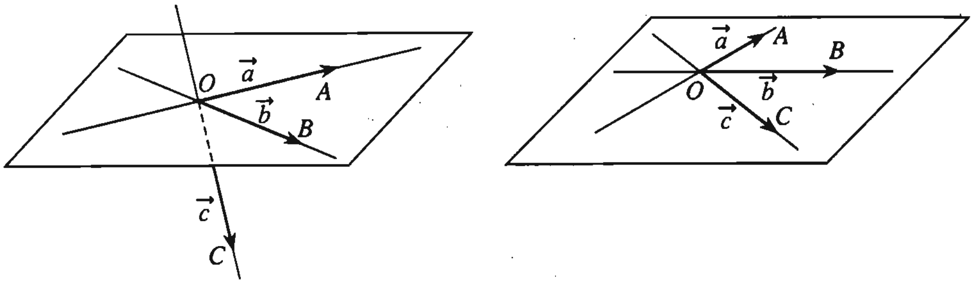
1. Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian

Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác vectơ - không. Nếu từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ thì có thể xảy ra hai trường hợp :

• Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng, khi đó ta nói rằng *ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng* (h.3.5a).

• Trường hợp các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói *ba vectơ* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *đồng phẳng* (h.3.5b).

Trong trường hợp này giá của các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ luôn luôn song song với một mặt phẳng.



a) Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng

b) Ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng

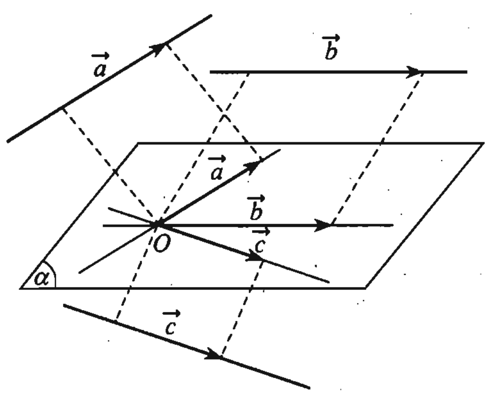
Hình 3.5

☞ ***Chú ý.*** Việc xác định sự đồng phẳng hoặc không đồng phẳng của ba vectơ nói trên không phụ thuộc vào việc chọn điểm O.

Từ đó ta có định nghĩa sau đây :

2. Định nghĩa

Trong không gian ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng (h.3.6).



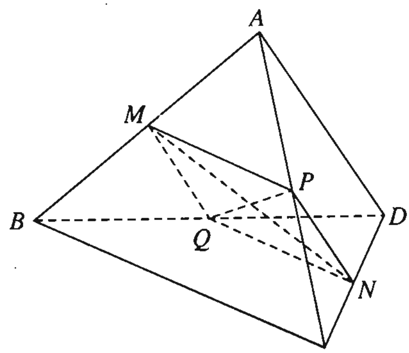
Hình 3.6

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Giải

Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AC và BD (h.3.7). Ta có PN song song với MQ và $PN = MQ = \frac{1}{2}AD$. Vậy tứ giác $MPNQ$ là hình bình hành. Mặt phẳng $(MPNQ)$ chứa đường thẳng MN và song song với các đường thẳng AD và BC.

Ta suy ra ba đường thẳng MN, AD, BC cùng song song với một mặt phẳng. Do đó ba vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.



Hình 3.7

△5 Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Chứng minh rằng các đường thẳng IK và ED song song với mặt phẳng (AFC). Từ đó suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{ED}$ đồng phẳng.

3. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Từ định nghĩa ba vectơ đồng phẳng và từ định lí về sự phân tích (hay biểu thị) một vectơ theo hai vectơ không cùng phương trong hình học phẳng chúng ta có thể chứng minh được định lí sau đây :

Định lí 1

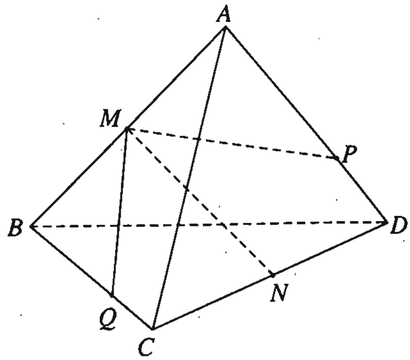
Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương và vectơ $\vec{c}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.

△6 Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Hãy xác định vectơ $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ và giải thích tại sao ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

△7 Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong không gian. Chứng minh rằng nếu $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong ba số m, n, p khác không thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên các cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm P và Q sao cho $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Giải



Hình 3.8

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$

và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ (h.3.8).

Do đó $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

hay $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$. (1)

Mặt khác vì $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ nên $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$,

$\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BQ}$.

Do đó từ (1) ta suy ra :

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}) = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ}).$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}), \text{ vì } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}.$$

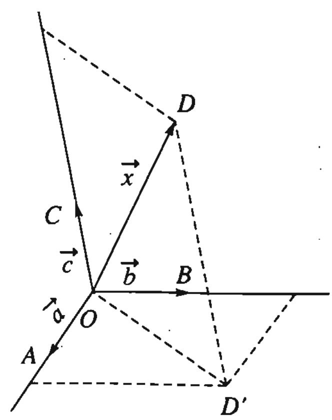
Hệ thức $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MP} + \frac{3}{4}\overrightarrow{MQ}$ chứng tỏ ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng nên bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Định lí 1 cho ta phương pháp chứng minh sự đồng phẳng của ba vectơ thông qua việc biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương.

Về việc biểu thị một vectơ bất kì theo ba vectơ không đồng phẳng trong không gian, người ta chứng minh được định lí sau đây.

Định lí 2

Trong không gian cho ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi đó với mọi vectơ $\vec{x}$ ta đều tìm được một bộ ba số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là duy nhất (h.3.9).



Hình 3.9

Ví dụ 5. Cho hình hộp *ABCD.EFGH* có $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$. Gọi *I* là trung điểm của đoạn *BG*. Hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{AI}$ qua ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Giải

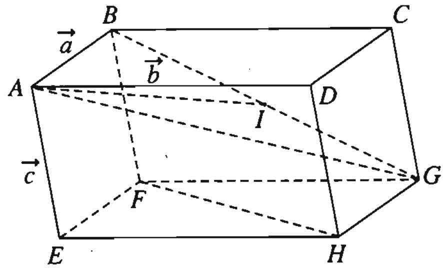
Vì *I* là trung điểm của đoạn *BG* nên ta có $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG})$

trong đó $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ (h.3.10).

Vậy $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$, suy ra

$\overrightarrow{AI}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}.$



Hình 3.10

BÀI TẬP

1. Cho hình lăng trụ tứ giác *ABCD.A'B'C'D'*. Mặt phẳng (*P*) cắt các cạnh bên *AA'*, *BB'*, *CC'*, *DD'* lần lượt tại *I*, *K*, *L*, *M*. Xét các vectơ có các điểm đầu là các điểm *I*, *K*, *L*, *M* và có các điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ. Hãy chỉ ra các vectơ :

a) Cùng phương với $\overrightarrow{IA}$;

b) Cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$;

c) Ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$.

2. Cho hình hộp *ABCD.A'B'C'D'*. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AC'}$;

b) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{D'D}-\overrightarrow{B'D'}=\overrightarrow{BB'}$;

c) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}=\vec{0}$.

3. Cho hình bình hành *ABCD*. Gọi *S* là một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa hình bình hành. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

4. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$;

b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

5. Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy xác định hai điểm E, F sao cho :

a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$;

b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

6. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$.

7. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN và P là một điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$.

8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (hay biểu thị) các vectơ $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

9. Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

10. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi K là giao điểm của AH và DE, I là giao điểm của BH và DF. Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KI}$, $\overrightarrow{FG}$ đồng phẳng.

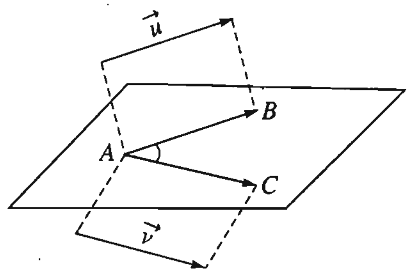
§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Góc giữa hai vectơ trong không gian

Định nghĩa

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác vectơ - không. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ $(0^o \le \widehat{BAC} \le 180^o)$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong không gian, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$ (h.3.11).



Hình 3.11

△1 Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của cạnh AB. Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây :

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{CH}$ và $\overrightarrow{AC}$.

2. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Định nghĩa

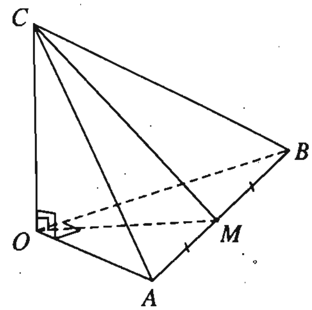
Trong không gian cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ đều khác vectơ - không. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$, được xác định bởi công thức :

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ ta quy ước $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Giải



Hình 3.12

Ta có $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{OM}|.|\overrightarrow{BC}|}$

$$= \dfrac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}} \text{ (h.3.12).}$$

Mặt khác $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$

$$= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}^2)$$

Vì OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = 1$ nên

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = 0 \text{ và } \overrightarrow{OB}^2 = 1.$$

Do đó $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = -\dfrac{1}{2}\cdot$ Vậy $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{BC}) = 120^{\circ}$.

△2 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

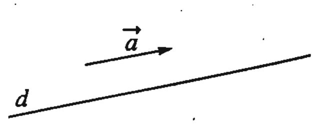
a) Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$.

b) Tính $\cos(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{BD})$ và từ đó suy ra $\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{BD}$ vuông góc với nhau.

II. VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa

Vectơ $\vec{a}$ khác vectơ - không được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d (h.3.13).



Hình 3.13

2. Nhận xét

a) Nếu $\vec{a}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì vectơ $k\vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là vectơ chỉ phương của d.

b) Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương $\vec{a}$ của nó.

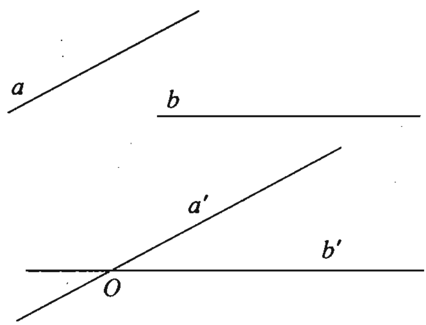
c) Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ khi chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vectơ chỉ phương cùng phương.

III. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian cho hai đường thẳng a, b bất kì. Từ một điểm O nào đó ta vẽ hai đường thẳng a' và b' lần lượt song song với a và b. Ta nhận thấy rằng khi điểm O thay đổi thì góc giữa a' và b' không thay đổi. Do đó ta có định nghĩa :

1. Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b (h.3.14).



Hình 3.14

2. Nhận xét

a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

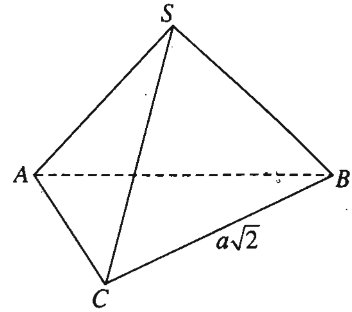
b) Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{v}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng b và $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0^\circ \le \alpha \le 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $90^\circ < \alpha \le 180^\circ$. Nếu a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0°.

△3 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây :

a) AB và $B'C'$; b) AC và $B'C'$; c) $A'C'$ và $B'C$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC.

Giải



Hình 3.15

Ta có $\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \dfrac{\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}|.|\overrightarrow{AB}|}$

$= \dfrac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AB}}{a.a}$ (h.3.15).

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{a^2}$$

Vì $CB^2 = (a\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 = AC^2 + AB^2$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = 0$. Tam giác SAB đều nên $(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$ và do đó $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AB} = a.a.\cos 120^\circ = -\dfrac{a^2}{2}\cdot$ Vậy :

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{-\dfrac{a^2}{2}}{a^2} = -\frac{1}{2}\cdot \text{ Do đó } (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ.$$

Ta suy ra góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

IV. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

Người ta kí hiệu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau là $a \perp b$.

2. Nhận xét

a) Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là các vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì : $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

b) Cho hai đường thẳng song song. Nếu một đường thẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

c) Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng AB và PQ là hai đường thẳng vuông góc với nhau.

Giải

Ta có $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$

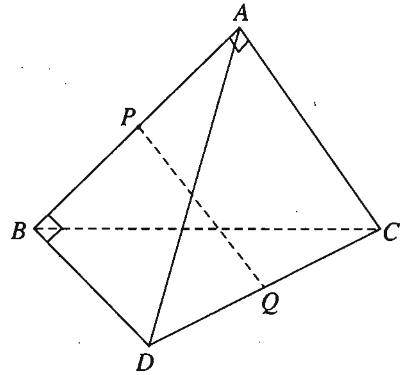
và $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DQ}$ (h.3.16).

Do đó $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Vậy $2\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB} = 0$

hay $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB} = 0$ tức là $PQ \perp AB$.



Hình 3.16

△4 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Hãy nêu tên các đường thẳng đi qua hai đỉnh của hình lập phương đã cho và vuông góc với :

a) đường thẳng AB ;

b) đường thẳng AC.

△5 Tìm những hình ảnh trong thực tế minh hoạ cho sự vuông góc của hai đường thẳng trong không gian (trường hợp cắt nhau và trường hợp chéo nhau).

BÀI TẬP

1. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây :

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$;

b) $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$;

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$.

2. Cho tứ diện $ABCD$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

b) Từ đẳng thức trên hãy suy ra rằng nếu tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.

3. a) Trong không gian nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b có song song với nhau không ?

b) Trong không gian nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a có vuông góc với c không ?

4. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC', $C'A$. Chứng minh rằng :

a) $AB \perp CC'$;

b) Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

5. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

6. Trong không gian cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Chứng minh rằng $AB \perp OO'$ và tứ giác $CDD'C'$ là hình chữ nhật.

7. Cho S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}.$$

8. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^{\circ}$. Chứng minh rằng :

a) $AB \perp CD$;

b) Nếu M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

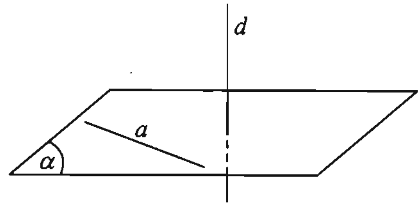
§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Trong thực tế, hình ảnh của sợi dây dọi vuông góc với nền nhà cho ta khái niệm về sự vuông góc của đường thẳng với mặt phẳng.



I. ĐỊNH NGHĨA

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) (h.3.17).



Hình 3.17

Khi d vuông góc với (α) ta còn nói (α) vuông góc với d, hoặc d và (α) vuông góc với nhau và kí hiệu là $d \perp (\alpha)$.

II. ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Định lí

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

Chứng minh

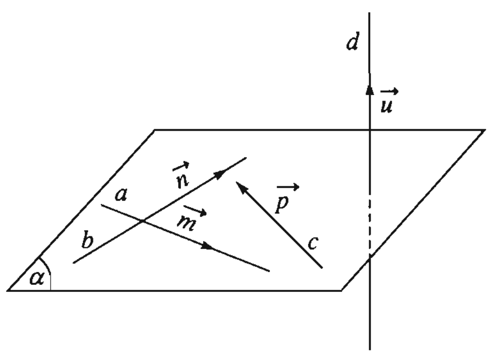
Giả sử hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (α) là a, b lần lượt có các vectơ chỉ phương là $\vec{m}$, $\vec{n}$ (h.3.18). Tất nhiên khi đó $\vec{m}$ và $\vec{n}$ là hai vectơ không cùng phương. Gọi c là một đường thẳng bất kì nằm trong mặt phẳng (α) và có vectơ chỉ phương $\vec{p}$. Vì ba vectơ $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ đồng phẳng và $\vec{m}$, $\vec{n}$ là hai vectơ không cùng phương nên ta có hai số x và y sao cho $\vec{p} = x\vec{m} + y\vec{n}$.

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d. Vì $d \perp a$ và $d \perp b$ nên ta có $\vec{u}.\vec{m} = 0$ và $\vec{u}.\vec{n} = 0$.

Khi đó

$\vec{u}.\vec{p} = \vec{u}.(x\vec{m} + y\vec{n}) = x.\vec{u}.\vec{m} + y.\vec{u}.\vec{n} = 0.$

Vậy đường thẳng d vuông góc với đường thẳng c bất kì nằm trong mặt phẳng (α) nghĩa là đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α).



Hình 3.18

Hệ quả

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

△1 Muốn chứng minh đường thẳng d vuông góc với một mặt phẳng (α), người ta phải làm như thế nào ?

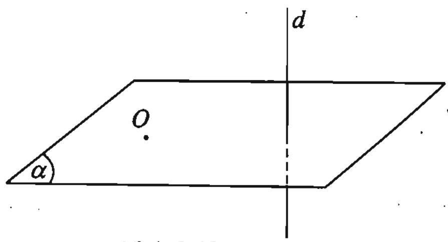
△2 Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng d vuông góc với a và b. Khi đó đường thẳng d có vuông góc với mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng song song a và b không ?

III. TÍNH CHẤT

Từ định nghĩa và điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ta có các tính chất sau :

Tính chất 1

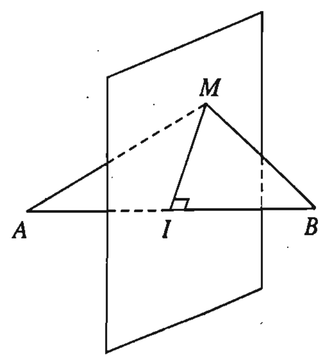
Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước (h.3.19).



Hình 3.19

Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng

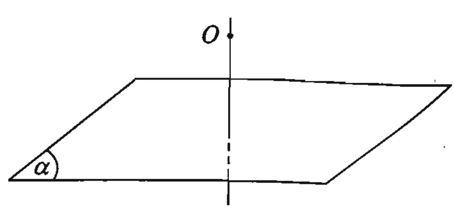
Người ta gọi mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB là *mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB* (h.3.20).



Hình 3.20

Tính chất 2

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước (h.3.21).



Hình 3.21

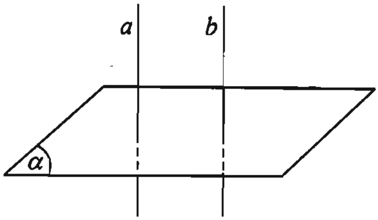
IV. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Người ta có thể chứng minh được một số tính chất sau đây về sự liên quan giữa quan hệ vuông góc và quan hệ song song của đường thẳng và mặt phẳng.

Tính chất 1

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia (h.3.22).

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

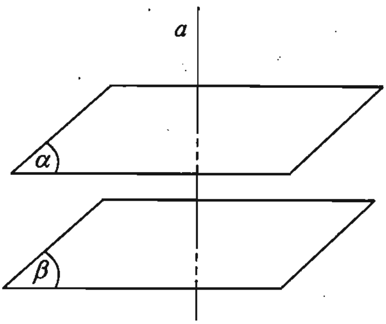


Hình 3.22

Tính chất 2

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia (h.3.23).

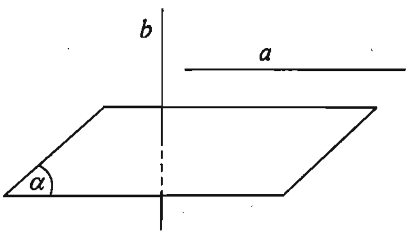
b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau (h.3.23).



Hình 3.23

Tính chất 3

a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a (h.3.24).



Hình 3.24

b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau (h.3.24).

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).

a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác SAB. Chứng minh $AH \perp SC$.

Giải

a) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$ (h.3.25).

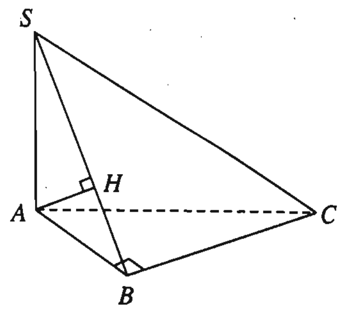
Ta có $BC \perp SA$, $BC \perp AB$.

Từ đó suy ra $BC \perp (SAB)$.

b) Vì $BC \perp (SAB)$ và AH nằm trong (SAB) nên $BC \perp AH$. Ta lại có

$AH \perp BC$, $AH \perp SB$ nên $AH \perp (SBC)$.

Từ đó suy ra $AH \perp SC$.

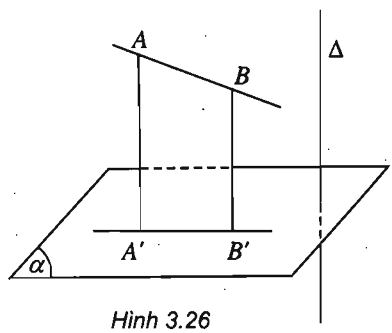


Hình 3.25

V. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ĐỊNH LÍ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC

1. Phép chiếu vuông góc

Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α). Phép chiếu song song theo phương của Δ lên mặt phẳng (α) được gọi là *phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng* (α) (h.3.26).



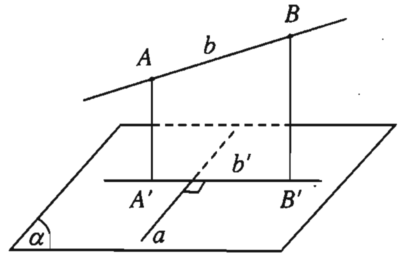
Hình 3.26

Nhận xét. Phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song. Chú ý rằng người ta còn dùng tên gọi "phép chiếu lên mặt phẳng (α)" thay cho tên gọi "phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α)" và dùng tên gọi $\mathscr{H}'$ là hình chiếu của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (α) thay cho tên gọi $\mathscr{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (α).

2. Định lí ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.

Chứng minh



Hình 3.27

Trên đường thẳng b lấy hai điểm A, B phân biệt sao cho chúng không thuộc (α). Gọi A' và B' lần lượt là hình chiếu của A và B trên (α). Khi đó hình chiếu b' của b trên (α) chính là đường thẳng đi qua hai điểm A' và B' (h.3.27).

Vì a nằm trong (α) nên a vuông góc với AA'.

– Vậy nếu a vuông góc với b thì a vuông góc với mặt phẳng (b', b). Do đó a vuông góc với b'.

– Ngược lại nếu a vuông góc với b' thì a vuông góc với mặt phẳng (b', b). Do đó a vuông góc với b.

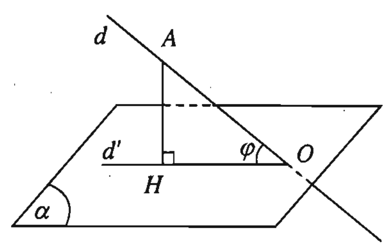
3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).

Trường hợp đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90°.

Trường hợp đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa d và hình chiếu d' của nó trên (α) gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α).



Hình 3.28

Khi d không vuông góc với (α) và d cắt (α) tại điểm O, ta lấy một điểm A tuỳ ý trên d khác với điểm O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (α) và φ là góc giữa d và (α) thì $\widehat{AOH} = \varphi$ (h.3.28).

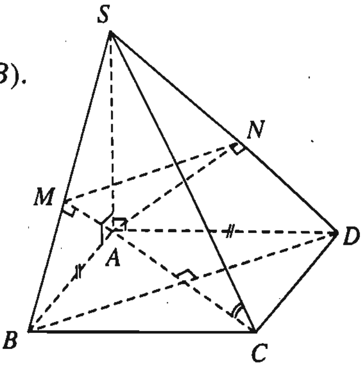
☞ ***Chú ý.*** Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^\circ \le \varphi \le 90^\circ$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, có cạnh $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A lên các đường thẳng SB và SD. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (AMN).

b) Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

Giải



Hình 3.29

a) Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp AS$, suy ra $BC \perp (ASB)$.

Từ đó suy ra $BC \perp AM$, mà $SB \perp AM$

nên $AM \perp (SBC)$. Do đó $AM \perp SC$ (h.3.29).

Tương tự ta chứng minh được $AN \perp SC$.

Vậy $SC \perp (AMN)$.

Do đó góc giữa SC và mặt phẳng (AMN) bằng 90°.

b) Ta có AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\widehat{SCA}$ là góc giữa đường thẳng SC với mặt phẳng $(ABCD)$. Tam giác vuông SAC cân tại A có $AS = AC = a\sqrt{2}$. Do đó $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

BÀI TẬP

1. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai ?

a) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.

b) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

c) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.

d) Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

2. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (ADI).

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI, chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ và có $SA = SB = SC = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng :

a) Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$;

b) Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC).

4. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O tới mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng :

a) H là trực tâm của tam giác ABC ;

b) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

5. Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh rằng :

a) $SO \perp (\alpha)$;

b) Nếu trong mặt phẳng (SAB) kẻ SH vuông góc với AB tại H thì AB vuông góc với mặt phẳng (SOH).

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho $\dfrac{SI}{SB} = \dfrac{SK}{SD}$. Chứng minh :

a) BD vuông góc với SC ;

b) IK vuông góc với mặt phẳng (SAC).

7. Cho tứ diện $SABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có tam giác ABC vuông tại B. Trong mặt phẳng (SAB) kẻ AM vuông góc với SB tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC}$. Chứng minh rằng :

a) $BC \perp (SAB)$ và $AM \perp (SBC)$;

b) $SB \perp AN$.

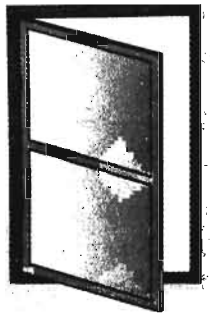
8. Cho điểm S không thuộc mặt phẳng (α) có hình chiếu trên (α) là điểm H. Với điểm M bất kì trên (α) và M không trùng với H, ta gọi SM là đường xiên và đoạn HM là hình chiếu của đường xiên đó. Chứng minh rằng :

a) Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau ;

b) Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn và ngược lại đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Hình ảnh của một cánh cửa chuyển động và hình ảnh của bề mặt bức tường cho ta thấy được sự thay đổi của góc giữa hai mặt phẳng.

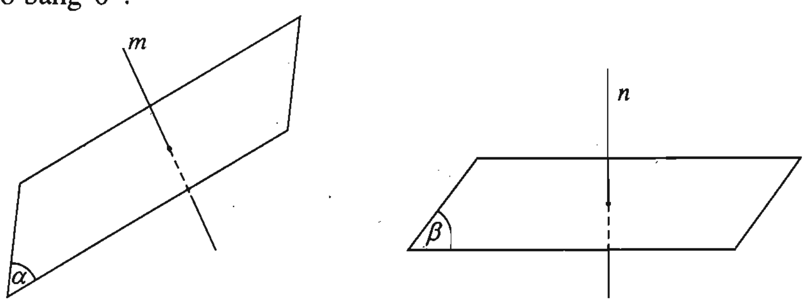


I. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

1. Định nghĩa

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó (h.3.30).

Nếu hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì ta nói rằng góc giữa hai mặt phẳng đó bằng 0^o.

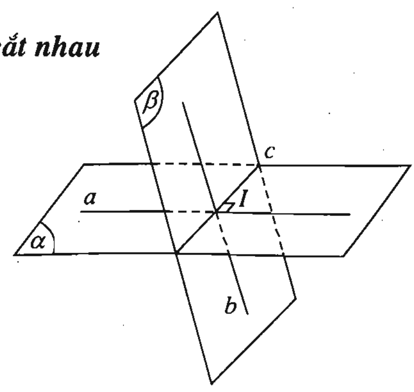


Hình 3.30

2. Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau

Giả sử hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c. Từ một điểm I bất kì trên c ta dựng trong (α) đường thẳng a vuông góc với c và dựng trong (β) đường thẳng b vuông góc với c.

Người ta chứng minh được góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a và b (h.3.31).



Hình 3.31

3. Diện tích hình chiếu của một đa giác

Người ta đã chứng minh tính chất sau đây :

Cho đa giác $\mathcal{H}$ nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích S và $\mathcal{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (β). Khi đó diện tích S' của $\mathcal{H}'$ được tính theo công thức :

$$\boxed{S' = S\cos\varphi}$$

với φ là góc giữa (α) và (β).

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = \frac{a}{2}$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC).

b) Tính diện tích tam giác SBC.

Giải

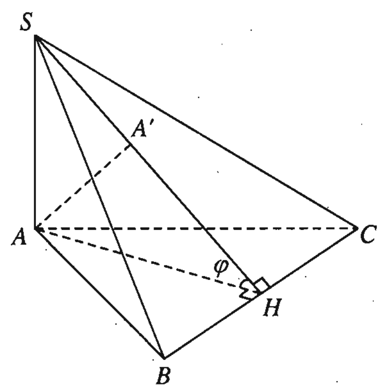
a) Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Ta có $BC \perp AH$. (1)

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAH)$ nên $BC \perp SH$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng $\widehat{SHA}$. Đặt $\varphi = \widehat{SHA}$ (h.3.32), ta có

$$\tan\varphi = \frac{SA}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ta suy ra $\varphi = 30^\circ$.



Hình 3.32

Vậy góc giữa (ABC) và (SBC) bằng 30°.

b) Vì $SA \perp (ABC)$ nên tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác SBC. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của các tam giác SBC và ABC. Ta có

$$S_2 = S_1.\cos\varphi \Rightarrow S_1 = \frac{S_2}{\cos\varphi}.$$

Suy ra : $S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2}.$

II. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta kí hiệu $(\alpha) \perp (\beta)$.

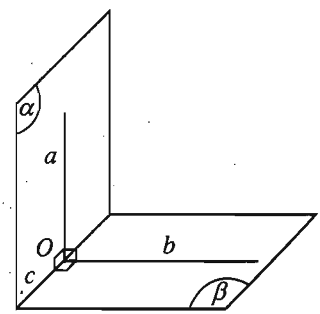
2. Các định lí

Định lí 1

Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Chứng minh

Giả sử (α), (β) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi c là giao tuyến của (α) và (β). Từ điểm O thuộc c, trong mặt phẳng (α) vẽ đường thẳng a vuông góc với c và trong (β) vẽ đường thẳng b vuông góc với c (h.3.33). Ta có góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Vì (α) vuông góc với (β) nên góc giữa hai đường thẳng a và b bằng 90°, nghĩa là a vuông góc với b. Mặt khác theo cách dựng ta có a vuông góc với c.



Hình 3.33

Do đó a vuông góc với mặt phẳng (c, b) hay a vuông góc với (β).

Lí luận tương tự ta tìm được trong mặt phẳng (β) đường thẳng b vuông góc với (α).

Ngược lại, giả sử mặt phẳng (α) có chứa một đường thẳng a' vuông góc với mặt phẳng (β). Gọi O' là giao điểm của a' với (β) thì tất nhiên O' thuộc giao tuyến c của (α) và (β). Trong mặt phẳng (β) dựng đường thẳng b' đi qua O' và vuông góc với c. Vì a' vuông góc với (β) nên a' vuông góc với c và a' vuông góc với b'. Mặt khác ta có a' vuông góc với c và b' vuông góc với c nên góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng a', b' và bằng 90°. Vậy (α) vuông góc với (β).

△1 Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Chứng minh rằng nếu có một đường thẳng Δ nằm trong (α) và Δ vuông góc với d thì Δ vuông góc với (β).

Hệ quả 1

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Hệ quả 2

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α).

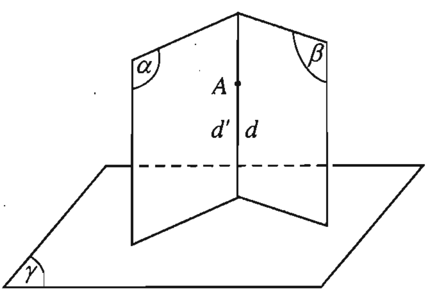
Định lí 2

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Chứng minh

Giả sử (α) và (β) là hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng (γ).

Từ một điểm A trên giao tuyến d của hai mặt phẳng (α) và (β) ta dựng đường thẳng d' vuông góc với mặt phẳng (γ). Theo hệ quả 2 thì d' nằm trong (α) và d' nằm trong (β). Vậy d' trùng với d nghĩa là d vuông góc với (γ) (h.3.34).



Hình 3.34

△2 Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ADB) cũng đôi một vuông góc với nhau.

△3 Cho hình vuông $ABCD$. Dựng đoạn thẳng AS vuông góc với mặt phẳng chứa hình vuông $ABCD$.

a) Hãy nêu tên các mặt phẳng lần lượt chứa các đường thẳng SB, SC, SD và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

III. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

1. Định nghĩa

> *Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với các mặt đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.*

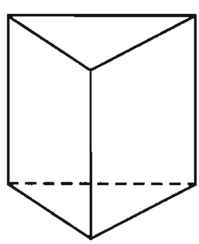
- Hình lăng trụ đứng có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, v.v... được gọi là *hình lăng trụ đứng tam giác, hình lăng trụ đứng tứ giác, hình lăng trụ đứng ngũ giác, v.v...*

- Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều được gọi là *hình lăng trụ đều.* Ta có các loại lăng trụ đều như *hình lăng trụ tam giác đều, hình lăng trụ tứ giác đều, hình lăng trụ ngũ giác đều ...*

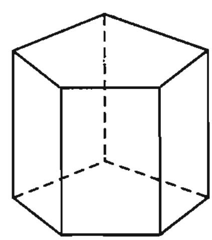
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành được gọi là *hình hộp đứng.*

- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là *hình hộp chữ nhật.*

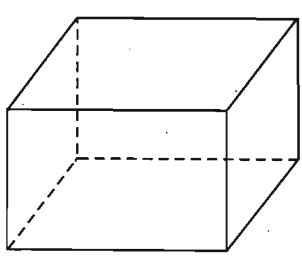
- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình vuông và các mặt bên đều là hình vuông được gọi là *hình lập phương.*



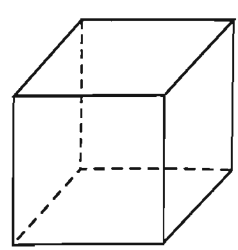
Hình lăng trụ đứng tam giác



Hình lăng trụ đứng ngũ giác



Hình hộp chữ nhật



Hình lập phương

Hình 3.35

△4 Cho biết mệnh đề nào sau đây là đúng ?

a) Hình hộp là hình lăng trụ đứng.

b) Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng.

c) Hình lăng trụ là hình hộp.

d) Có hình lăng trụ không phải là hình hộp.

2. *Nhận xét*

Các mặt bên của hình lăng trụ đứng luôn luôn vuông góc với mặt phẳng đáy và là những hình chữ nhật.

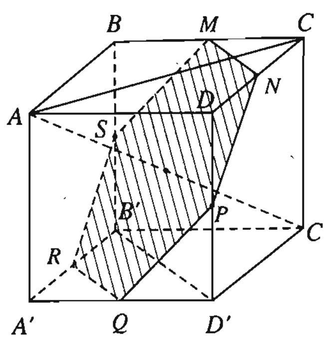
△5 Sáu mặt của hình hộp chữ nhật có phải là những hình chữ nhật không ?

Ví dụ. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính diện tích thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng trung trực (α) của đoạn AC'.

Giải

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có $MA = MC' = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực của AC' (h.3.36).

Gọi N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của CD, DD', $D'A'$, $A'B'$, $B'B$. Chứng minh tương tự như trên ta có các điểm này đều thuộc mặt phẳng trung trực của AC'. Vậy thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng trung trực (α) của đoạn AC' là hình lục giác đều $MNPQRS$ có cạnh bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



Hình 3.36

Diện tích S của thiết diện cần tìm là :

$$S = 6\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

IV. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

1. Hình chóp đều

Cho hình chóp đỉnh S có đáy là đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ và H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy $(A_1A_2 \ldots A_n)$. Khi đó đoạn thẳng SH gọi là *đường cao* của hình chóp và H gọi là *chân đường cao.*

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Nhận xét

a) Hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

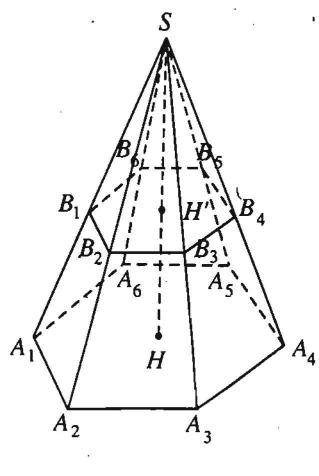
b) Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

2. Hình chóp cụt đều

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

Ví dụ hình $A_1A_2A_3A_4A_5A_6.B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ trong hình 3.37 là một hình chóp cụt đều. Hai đáy của hình chóp cụt đều là hai đa giác đều và đồng dạng với nhau.

Nhận xét. Các mặt bên của hình chóp cụt đều là những hình thang cân và các cạnh bên của hình chóp cụt đều có độ dài bằng nhau.



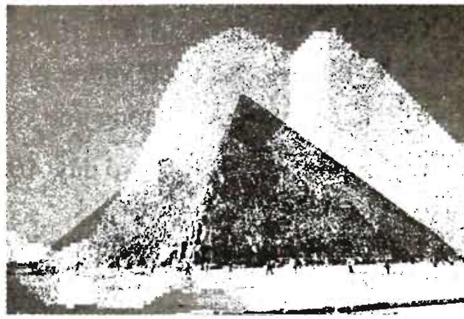
Hình 3.37

△6 Chứng minh rằng hình chóp đều có các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.

△7 Có tồn tại một hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy hay không ?

Bạn có biết ?

Kim tự tháp Kê-ốp (Chéops)



Kim tự tháp Kê-ốp do ông vua Kê-ốp của nước Ai Cập chủ trì việc xây dựng. Đây là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập. Tháp này được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên và được xem là một trong bảy kì quan của thế giới. Tháp có hình dạng là một khối chóp tứ giác đều và có đáy là một hình vuông mỗi cạnh dài khoảng 230 m. Trước đây chiều cao của tháp là 147 m, nay do bị bào mòn ở đỉnh nên chiều cao của tháp chỉ còn khoảng 138 m. Người ta không biết người cổ Ai Cập đã xây dựng tháp bằng cách nào, làm thế nào để lắp ghép các tảng đá lại với nhau và làm thế nào để đưa được các tảng đá nặng và to lên các độ cao cần thiết. Tháp nặng khoảng sáu triệu tấn và được lắp ghép bởi 2300000 tảng đá. Thật là một công trình kì vĩ !

BÀI TẬP

1. Cho ba mặt phẳng (α), (β), (γ), mệnh đề nào sau đây đúng ?

a) Nếu $(\alpha) \perp (\beta)$ và $(\alpha) \,//\, (\gamma)$ thì $(\beta) \perp (\gamma)$;

b) Nếu $(\alpha) \perp (\beta)$ và $(\alpha) \perp (\gamma)$ thì $(\beta) \,//\, (\gamma)$.

2. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng đó hai điểm A và B sao cho $AB = 8$ cm. Gọi C là một điểm trên (α) và D là một điểm trên (β) sao cho AC và BD cùng vuông góc với giao tuyến Δ và $AC = 6$ cm, $BD = 24$ cm. Tính độ dài đoạn CD.

3. Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông ở B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với (α) tại A. Chứng minh rằng :

a) $\widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) ;

b) Mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (BCD) ;

c) $HK \parallel BC$ với H và K lần lượt là giao điểm của DB và DC với mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với DB.

4. Cho hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau và một điểm M không thuộc (α) và không thuộc (β). Chứng minh rằng qua điểm M có một và chỉ một mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β). Nếu (α) song song với (β) thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào ?

5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng :

a) Mặt phẳng $(AB'C'D)$ vuông góc với mặt phẳng $(BCD'A')$;

b) Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng $(A'BD)$.

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi cạnh a và có $SA = SB = SC = a$. Chứng minh rằng :

a) Mặt phẳng $(ABCD)$ vuông góc với mặt phẳng (SBD) ;

b) Tam giác SBD là tam giác vuông.

7. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng $(ADC'B')$ vuông góc với mặt phẳng $(ABB'A')$.

b) Tính độ dài đường chéo AC' theo a, b, c.

8. Tính độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh a.

9. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có SH là đường cao. Chứng minh $SA \perp BC$ và $SB \perp AC$.

10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng SO.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn SC. Chứng minh hai mặt phẳng (MBD) và (SAC) vuông góc với nhau.

c) Tính độ dài đoạn OM và tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng 60°, cạnh $SC = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC).

b) Trong tam giác SCA kẻ IK vuông góc với SA tại K. Hãy tính độ dài IK.

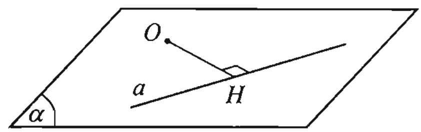
c) Chứng minh $\widehat{BKD} = 90^\circ$ và từ đó suy ra mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SAD).

§5. KHOẢNG CÁCH

I. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm O và đường thẳng a. Trong mặt phẳng (O, a) gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a. Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là *khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a* (h.3.38), kí hiệu là $d(O, a)$.

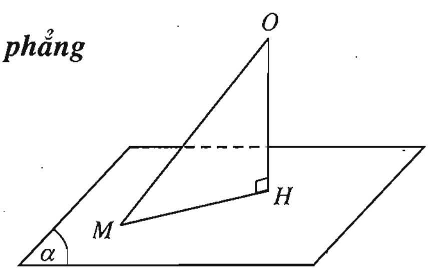


Hình 3.38

△1 Cho điểm O và đường thẳng a. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a là bé nhất so với các khoảng cách từ O đến một điểm bất kì của đường thẳng a.

2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Cho điểm O và mặt phẳng (α). Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (α). Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là *khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α)* (h.3.39) và được kí hiệu là $d(O, (\alpha))$.



Hình 3.39

△2 Cho điểm O và mặt phẳng (α). Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) là bé nhất so với các khoảng cách từ O tới một điểm bất kì của mặt phẳng (α).

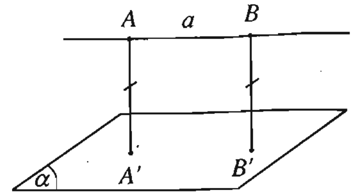
II. KHOẢNG CÁCH GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Định nghĩa

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ

một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α), kí hiệu là $d(a, (\alpha))$ (h.3.40).



Hình 3.40

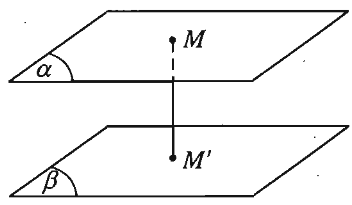
3 Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Chứng minh rằng khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là bé nhất so với khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc a tới một điểm bất kì thuộc mặt phẳng (α).

2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Định nghĩa

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia (h.3.41).

Ta kí hiệu khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau là $d((\alpha), (\beta))$. Khi đó $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta))$ với $M \in (\alpha)$, và $d((\alpha), (\beta)) = d(M', (\alpha))$ với $M' \in (\beta)$ (h.3.41).

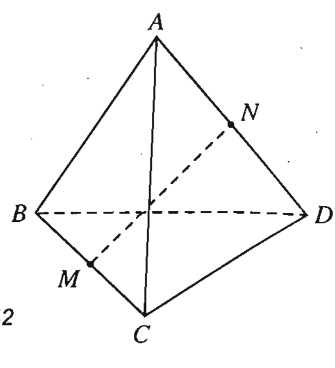


Hình 3.41

4 Cho hai mặt phẳng (α) và (β). Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (α) và (β) là nhỏ nhất trong các khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này tới một điểm bất kì của mặt phẳng kia.

III. ĐƯỜNG VUÔNG GÓC CHUNG VÀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

5 Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và AD. Chứng minh rằng : $MN \perp BC$ và $MN \perp AD$ (h.3.42).

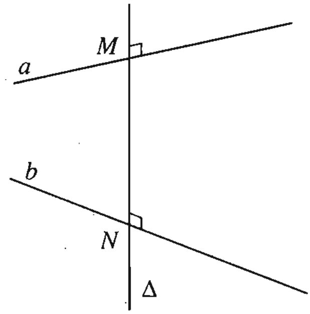


Hình 3.42

1. Định nghĩa

a) Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

b) Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b (h.3.43).

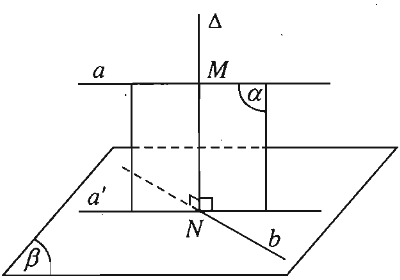


Hình 3.43

2. Cách tìm đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi (β) là mặt phẳng chứa b và song song với a, a' là hình chiếu vuông góc của a trên mặt phẳng (β).

Vì $a \parallel (\beta)$ nên $a \parallel a'$. Do đó a' và b cắt nhau tại một điểm. Gọi điểm này là N. Gọi (α) là mặt phẳng chứa a và a', Δ là đường thẳng đi qua N và vuông góc với (β). Khi đó (α) vuông góc với (β). Như vậy Δ nằm trong (α) nên cắt đường thẳng a tại M và cắt đường thẳng b tại N, đồng thời Δ cùng vuông góc với cả a và b. Do đó Δ là đường vuông góc chung của a và b (h.3.44).

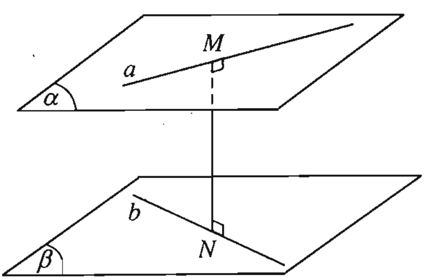


Hình 3.44

3. Nhận xét

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó (h.3.45).



Hình 3.45

△6 Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là bé nhất so với khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy.

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD.

Giải

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Trong mặt phẳng (SAC) vẽ $OH \perp SC$ (h.3.46).

Ta có $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$, suy ra $BD \perp OH$.

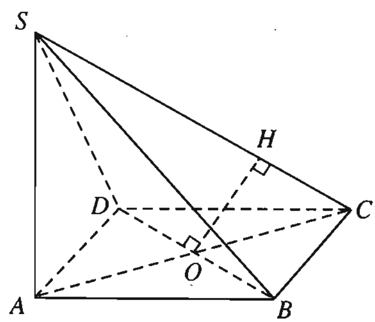
Mặt khác $OH \perp SC$. Vậy OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD.

Độ dài đoạn OH là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD.

Hai tam giác vuông SAC và OHC đồng dạng vì có chung góc nhọn C.

Do đó $\dfrac{SA}{SC} = \dfrac{OH}{OC}$ (= sin$C$).

Vậy $OH = \dfrac{SA.OC}{SC}$.



Hình 3.46

Ta có $SA = a$, $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$,

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2}$$
$$= \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$$

nên $OH = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD là $OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

BÀI TẬP

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

   a) Đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b nếu Δ vuông góc với a và Δ vuông góc với b ;

   b) Gọi (P) là mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng a, b chéo nhau. Khi đó đường vuông góc chung Δ của a và b luôn luôn vuông góc với (P) ;

   c) Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b thì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (a, Δ) và (b, Δ) ;

   d) Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường thẳng nào đi qua một điểm M trên a đồng thời cắt b tại N và vuông góc với b thì đó là đường vuông góc chung của a và b ;

   e) Đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng chéo nhau a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

2. Cho tứ diện $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC.

   a) Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy.

   b) Chứng minh rằng SC vuông góc với mặt phẳng (BHK) và HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

   c) Xác định đường vuông góc chung của BC và SA.

3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Chứng minh rằng các khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

4. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

   a) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

   b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

   a) Chứng minh rằng $B'D$ vuông góc với mặt phẳng $(BA'C')$.

   b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD').

   c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

6. Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối trung điểm hai cạnh AB và CD của tứ diện $ABCD$ là đường vuông góc chung của AB và CD thì $AC = BD$ và $AD = BC$.

7. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Tính khoảng cách từ S tới mặt đáy (ABC).

8. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối của tứ diện đều đó.

CÂU HỎI ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Nhắc lại định nghĩa vectơ trong không gian.

   Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Hãy kể tên những vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của hình lăng trụ.

2. Trong không gian cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác vectơ - không. Khi nào ba vectơ đó đồng phẳng ?

3. Trong không gian hai đường thẳng không cắt nhau có thể vuông góc với nhau không ? Giả sử hai đường thẳng a, b lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Khi nào ta có thể kết luận a và b vuông góc với nhau ?

4. Muốn chứng minh đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) có cần chứng minh a vuông góc với mọi đường thẳng của (α) hay không ?

5. Hãy nhắc lại nội dung định lí ba đường vuông góc.

6. Nhắc lại định nghĩa :

   a) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng ;

   b) Góc giữa hai mặt phẳng.

7. Muốn chứng minh mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng (β) thì phải chứng minh như thế nào ?

8. Hãy nêu cách tính khoảng cách :

   a) Từ một điểm đến một đường thẳng ;

   b) Từ đường thẳng a đến mặt phẳng (α) song song với a ;

   c) Giữa hai mặt phẳng song song.

9. Cho a và b là hai đường thẳng chéo nhau. Có thể tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau này bằng những cách nào ?

10. Chứng minh rằng tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

a) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song ;

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song ;

c) Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng b mà b vuông góc với đường thẳng a, thì a song song với (α) ;

d) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song ;

e) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.

2. Trong các điều khẳng định sau đây, điều nào là đúng ?

a) Khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại ;

b) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng khác ;

c) Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng khác ;

d) Đường thẳng nào vuông góc với cả hai đường thẳng chéo nhau cho trước là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

3. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh SA bằng a và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b) Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với cạnh SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'. Chứng minh $B'D'$ song song với BD và AB' vuông góc với SB.

4. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{3a}{4}\cdot$ Gọi E là trung điểm của đoạn BC, F là trung điểm của đoạn BE.

a) Chứng minh mặt phẳng (SOF) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

b) Tính các khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

5. Tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ADC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = b$. Tam giác ADC vuông tại D có $CD = a$.

a) Chứng minh các tam giác BAD và BDC là những tam giác vuông.

b) Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh IK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

a) Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng $(A'B'CD)$.

b) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a có góc $\widehat{BAD} = 60^{\circ}$ và $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ và độ dài cạnh SC.

b) Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Chứng minh SB vuông góc với BC.

d) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Tính $\tan\varphi$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

1. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

(A) Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$.

(B) Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$.

(C) Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

(D) Nếu $\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm của đoạn AC.

2. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây :

(A) Vì $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP ;

(B) Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) ;$$

(C) Từ hệ thức $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng ;

(D) Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

3. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng ?

Cho hình lập phương *ABCD.EFGH* có cạnh bằng a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng

(A) a^2 ; (B) $a^2\sqrt{2}$;

(C) $a^2\sqrt{3}$; (D) $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

4. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

(A) Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c ;

(B) Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c ;

(C) Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c ;

(D) Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b).

5. Trong các mệnh đề sau đây, hãy tìm mệnh đề đúng.

(A) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

(B) Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

(C) Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (α) và mỗi điểm B thuộc (β) thì ta có đường thẳng AB vuông góc với d.

(D) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

6. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây :

(A) Hai đường thẳng a và b trong không gian có các vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Điều kiện cần và đủ để a và b chéo nhau là a và b không có điểm chung và hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương ;

(B) Cho a, b là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Đường vuông góc chung của a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia ;

(C) Không thể có một hình chóp tứ giác *S.ABCD* nào có hai mặt bên (*SAB*) và (*SCD*) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy ;

(D) Cho $\vec{u}, \vec{v}$ là hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) và $\vec{n}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Điều kiện cần và đủ để $\Delta \perp (\alpha)$ là $\vec{n}.\vec{u} = 0$ và $\vec{n}.\vec{v} = 0$.

7. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

(A) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

(B) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

(C) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng.

(D) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong một mặt phẳng thì đồng quy.

8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ?

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

(D) Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ?

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

(D) Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a.

10. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

(A) Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.

(B) Qua một điểm cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

(C) Qua một điểm cho trước có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

(D) Cho ba đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi một. Khi đó ba đường thẳng này sẽ nằm trong ba mặt phẳng song song với nhau từng đôi một.

11. Khoảng cách giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a bằng kết quả nào trong các kết quả sau đây ?

(A) $\frac{3a}{2}$; (B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;

(C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; (D) $a\sqrt{2}$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A(1 ; 1)$, $B(0 ; 3)$, $C(2 ; 4)$. Xác định ảnh của tam giác ABC qua các phép biến hình sau :

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2 ; 1)$;

b) Phép đối xứng qua trục Ox ;

c) Phép đối xứng qua tâm $I(2 ; 1)$;

d) Phép quay tâm O góc 90° ;

e) Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Oy và phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$.

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi G và H tương ứng là trọng tâm và trực tâm của tam giác, các điểm A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) Tìm phép vị tự F biến A, B, C tương ứng thành A', B', C'.

b) Chứng minh rằng O, G, H thẳng hàng.

c) Tìm ảnh của O qua phép vị tự F.

d) Gọi A'', B'', C'' lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH, CH ; A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của các tia AH, BH, CH với đường tròn (O) ; A'_1, B'_1, C'_1 tương ứng là chân các đường cao đi qua A, B, C.

Tìm ảnh của A, B, C, A_1, B_1, C_1 qua phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$.

e) Chứng minh chín điểm $A', B', C', A'', B'', C'', A'_1, B'_1, C'_1$ cùng thuộc một đường tròn (đường tròn này gọi là đường tròn Ơ-le của tam giác ABC).

3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn. Gọi M là trung điểm của đoạn AB, E là giao điểm của hai cạnh bên của hình thang $ABCD$ và G là trọng tâm của tam giác ECD.

   a) Chứng minh rằng bốn điểm S, E, M, G cùng thuộc một mặt phẳng (α) và mặt phẳng này cắt cả hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) theo cùng một giao tuyến d.

   b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

   c) Lấy một điểm K trên đoạn SE và gọi $C' = SC \cap KB$, $D' = SD \cap KA$.

   Chứng minh rằng giao điểm của AC' và BD' thuộc đường thẳng d nói trên.

4. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ có E, F, M và N lần lượt là trung điểm của AC, BD, AC' và BD'. Chứng minh $MN = EF$.

5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và DD'. Hãy xác định các thiết diện của hình lập phương cắt bởi các mặt phẳng (EFB), (EFC), (EFC') và (EFK) với K là trung điểm của cạnh $B'C'$.

6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

   a) Hãy xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau BD' và $B'C$.

   b) Tính khoảng cách của hai đường thẳng BD' và $B'C$.

7. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, có $AD = 2a$, $AB = BC = a$. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy một điểm S. Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SC và SD. Chứng minh rằng :

   a) $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^\circ$.

   b) AD', AC' và AB cùng nằm trên một mặt phẳng.

   c) Chứng minh rằng đường thẳng $C'D'$ luôn luôn đi qua một điểm cố định khi S di động trên tia Ax.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

CHƯƠNG I

§2.

1. Để ý rằng $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.
2. Là tam giác $GB'C'$ sao cho các tứ giác $ABB'G$ và $ACC'G$ là các hình bình hành. Dựng D sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{GA}$.
3. a) $T_{\vec{v}}(A) = (2 ; 7)$, $T_{\vec{v}}(B) = (-2 ; 3)$;

   b) $C = T_{-\vec{v}}(A) = (4 ; 3)$;

   c) d' có phương trình $x - 2y + 8 = 0$.
4. Có vô số.

§3.

1. $A'(1 ; 2)$, $B'(3 ; -1)$

   Đường thẳng $A'B'$ có phương trình là

   $3x + 2y - 7 = 0$.
2. $3x + y - 2 = 0$.
3. Các chữ V, I, E, T, A, M, W, O đều có trục đối xứng.

§4.

1. $A'(1 ; -3)$, d' có phương trình

   $x - 2y - 3 = 0$.
2. Hình bình hành và hình lục giác đều là những hình có tâm đối xứng.
3. Đường thẳng, hình gồm hai đường thẳng song song, ... là những hình có vô số tâm đối xứng.

§5.

1. Gọi E là điểm đối xứng với C qua tâm D.

   a) $Q_{(A,90^o)}(C) = E$;

   b) Đường thẳng CD.
2. $B(0 ; 2)$. Ảnh của d là đường thẳng có phương trình $x - y + 2 = 0$.

§6.

1. a) Chứng minh $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = 0$ và $OA = OA'$.

   b) $A_1(2 ; -3)$, $B_1(5 ; -4)$, $C_1(3 ; -1)$.
2. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua EH và phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{EO}$.
3. Sử dụng tính chất của phép dời hình.

§7.

1. Là tam giác nối trung điểm của các cạnh HA, HB, HC.
2. Sử dụng cách xác định tâm vị tự của hai đường tròn.
3. Dùng định nghĩa phép vị tự.

§8.

1. Thực hiện liên tiếp các phép biến hình theo định nghĩa.
2. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng tâm I và phép vị tự tâm A, tỉ số 2 để biến hình thang $JLKI$ thành hình thang $IHDC$.
3. Phương trình của nó là $x^2 + (y - 2)^2 = 8$.
4. Thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường phân giác của góc B và phép vị tự tâm B, tỉ số $\dfrac{AC}{AH}$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. a) Tam giác BCO ;

   b) Tam giác COD ;

   c) Tam giác EOD.
2. Gọi A' và d' theo thứ tự là ảnh của A và d qua các phép biến hình trên.

   a) $A'(1 ; 3)$, d' có phương trình :

   $3x + y - 6 = 0$.

   b) $A'(1 ; 2)$, d' có phương trình :

   $3x - y - 1 = 0$.

   c) $A'(1 ; -2)$, d' có phương trình :

   $3x + y - 1 = 0$.

   d) $A'(-2 ; -1)$, d' có phương trình :

   $x - 3y - 1 = 0$.

3. a) $(x-3)^2+(y+2)^2=9$;
b) $(x-1)^2+(y+1)^2=9$;
c) $(x-3)^2+(y-2)^2=9$;
d) $(x+3)^2+(y-2)^2=9$.

4. Dùng định nghĩa của phép tịnh tiến và phép đối xứng trục.

5. Tam giác BCD.

6. $(x-3)^2+(y-9)^2=36$.

7. N chạy trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$.

CHƯƠNG II

§1.

1. a) $E, F \in (ABC) \Rightarrow EF \subset (ABC)$;
b) $\begin{cases} I \in BC \\ BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (BCD)$.
Tương tự $I \in (DEF)$.

2. $\begin{cases} M \in d \\ d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow M \in (\beta)$.

3. Gọi $I = d_1 \cap d_2$. Chứng minh $I \in d_3$.

4. Chứng minh BG_B cắt AG_A tại điểm G với $\dfrac{GA}{GG_A}=3$. Lập luận tương tự CG_C, DG_D cũng cắt AG_A lần lượt tại các điểm G', G'' với $\dfrac{G'A}{G'G_A}=3$, $\dfrac{G''A}{G''G_A}=3$.
Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

5. a) Gọi $E = AB \cap CD$.
Ta có $ME = (MAB) \cap (SCD)$,
$N = SD \cap ME$.
b) Gọi $I = AM \cap BN$. Chứng minh $I \in SO$.

6. a) Gọi $E = CD \cap NP$.
Chứng minh $E = CD \cap (MNP)$.
b) $(MNP) \cap (ACD) = ME$.

7. a) $(IBC) \cap (KAD) = IK$.
b) Gọi $E = BI \cap MD$, $F = CI \cap DN$.
Ta có $(IBC) \cap (DMN) = EF$.

8. a) $(PMN) \cap (BCD) = EN$.
b) Gọi $Q = EN \cap BC$.
Ta có $Q = BC \cap (PMN)$.

9. a) Gọi $M = AE \cap DC$.
Ta có $M = DC \cap (C'AE)$.
b) Gọi $F = MC' \cap SD$. Thiết diện là tứ giác $AEC'F$.

10. a) Gọi $N = SM \cap CD$.
Ta có $N = CD \cap (SBM)$.
b) Gọi $O = AC \cap BN$.
Ta có $(SAC) \cap (SBM) = SO$.
c) Gọi $I = SO \cap BM$.
Ta có $I = BM \cap (SAC)$.
d) Gọi $R = AB \cap CD$, $P = MR \cap SC$.
Ta có $P = SC \cap (ABM)$;
$MP = (SCD) \cap (AMB)$

§2.

1. Áp dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng.

2. a) Khi $PR \parallel AC$, qua Q vẽ đường thẳng song song với AC cắt AD tại S.
b) Khi PR cắt AC tại I ta có $S = IQ \cap AD$.

3. a) $A' = BN \cap AG$.
b) Chứng minh B, M', A' là điểm chung của hai mặt phẳng (ABN) và (BCD). Để chứng minh $BM' = M'A' = A'N$ dùng tính chất đường trung bình trong hai tam giác NMM' và BAA'.
c) Ta có $GA' = \dfrac{1}{2}MM'$, $MM' = \dfrac{1}{2}AA'$ suy ra kết quả.

§3.

1. a) Chứng minh $OO' \parallel DF$ và $OO' \parallel CE$.
b) Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh $MN \parallel DE$.

2. a) Giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện là các cạnh của tứ giác $MNPQ$ có $MN \parallel PQ \parallel AC$ và $MQ \parallel NP \parallel BD$.
b) Hình bình hành.

3. (α) cắt (SAB), $(ABCD)$ theo các giao tuyến song song với AB và (α) cắt (SBC) theo giao tuyến song song với SC.

§4.

1. Dùng tính chất "một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song theo hai giao tuyến song song".

2. a) Chứng minh tứ giác $AA'M'M$ là hình bình hành.

   b) Gọi $I = AM' \cap A'M$.
   Ta có $I = A'M \cap (AB'C')$.

   c) Gọi $O = AB' \cap A'B$.
   Ta có $OC' = (AB'C') \cap (BA'C')$.

   d) $G = OC' \cap AM'$.

3. a) Dùng tính chất "nếu một mặt phẳng chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và a, b cùng song song với một mặt phẳng thì hai mặt phẳng đó song song".

   b) Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, $G_1 = AC' \cap A'O$. Chứng minh $\frac{A'G_1}{A'O} = \frac{2}{3}$. Tương tự cho G_2.

   c) G_1, G_2 lần lượt là trung điểm của AG_2 và $C'G_1$.

   d) Thiết diện là hình bình hành $AA'C'C$.

4. Ứng dụng định lí Ta-lét.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. a) Gọi $G = AC \cap BD$; $H = AE \cap BF$.
   Ta có $GH = (AEC) \cap (BFD)$.
   Gọi $I = AD \cap BC$; $K = AF \cap BE$.
   Ta có $IK = (BCE) \cap (ADF)$.

   b) Gọi $N = AM \cap IK$.
   Ta có $N = AM \cap (BCE)$.

   c) Nếu cắt nhau thì hai hình thang đã cho cùng nằm trong một mặt phẳng. Vô lí.

2. a) Gọi $E = AB \cap NP, F = AD \cap NP$,
   $R = SB \cap ME$, $Q = SD \cap MF$.
   Thiết diện là ngũ giác $MQPNR$.
   Gọi $H = NP \cap AC$,
   $I = SO \cap MH$. Ta có $I = SO \cap (MNP)$.

3. a) Gọi $E = AD \cap BC$.
   Ta có $(SAD) \cap (SBC) = SE$.

   b) Gọi $F = SE \cap MN, P = SD \cap AF$.
   Ta có $P = SD \cap (AMN)$.

   c) Tứ giác $AMNP$.

4. a) Chú ý $Ax \parallel Dt$ và $AB \parallel CD$.

   b) IJ là đường trung bình của hình thang $AA'C'C$ nên $IJ \parallel AA'$.

   c) $DD' = a + c - b$.

CHƯƠNG III

§1.

1. a) Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{IA}$:
   $\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KB'}, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LC'}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MD'}$.

   b) Các vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$:
   $\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{MD}$.

   c) Các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$:
   $\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{KB'}, \overrightarrow{LC'}, \overrightarrow{MD'}$.

2. a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$.

   b) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{BB'}$.

   c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} =$
   $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD'} + \overrightarrow{D'B'} + \overrightarrow{B'A}$
   $= \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

3. Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Ta có :
   $$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \\ \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}\end{array}\right\}$$
   $$\Rightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$$

4. a) $$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}\end{array}\right\}$$
   $$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$$
   $$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

b) $\left.\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}\end{aligned}\right\}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$

5. a) $\overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD}$, với G là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABGC$ vì $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Vậy $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD}$, với E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $AGED$.

Do đó AE là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là AB, AC, AD.

b) $\overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DG}.$

Vậy F là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ADGF$.

6. $\left.\begin{aligned}\overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GA} \\ \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC}\end{aligned}\right\}$

$\Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$

vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

7. a) Ta có $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$

mà $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}$, $2\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}$

suy ra $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

b) Với điểm P bất kì trong không gian ta có :

$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PI}$, $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PI}$

$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PI}$, $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PI}$

Vậy $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} =$

$= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} - 4\overrightarrow{PI}$

Mà $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

nên $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$.

8. $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB})$
$= \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB}$
$= \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}.$

9. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN}$ (1)

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN}$ (2)

Cộng (1) với (2) ta được

$3\overrightarrow{MN} = \underbrace{\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{BN}}_{\vec{0}}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{AB}$ đồng phẳng.

10. Ta có $KI \parallel EF \parallel AB$.

$FG \parallel BC$ và $AC \subset (ABC)$.

Do đó ba vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{KI}$, $\overrightarrow{FG}$ đồng phẳng vì chúng có giá cùng song song với mp (α). Mặt phẳng này song song với mp (ABC).

§2.

1. a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = 45^o$; b) $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EG}) = 60^o$;

c) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}) = 90^o$.

2. a) $\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AC}.(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) \\ \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\end{aligned}\right\}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AD \perp BC.$

3. a) a và b nói chung không song song.

b) a và c nói chung không vuông góc.

4. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Vậy $AB \perp CC'$.

b) $MN = PQ = \dfrac{AB}{2}$

và $MQ = NP = \dfrac{CC'}{2}$. Vì $AB \perp CC'$ mà $MN \parallel AB$, $MQ \parallel CC'$ nên $MN \perp MQ$. Vậy hình bình hành $MNPQ$ là hình chữ nhật.

5. $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})$

$= \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = 0$

$\Rightarrow SA \perp BC$.

Tương tự ta có $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

6. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AO})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = 0$

$\Rightarrow AB \perp OO'$.

Tứ giác $CDD'C'$ là hình bình hành có $CC' \perp AB$ nên $CC' \perp CD$.

Do đó tứ giác $CDD'C'$ là hình chữ nhật.

7. Ta có $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A$

$= \dfrac{1}{2}AB.AC\sqrt{1-\cos^2 A}$.

Vì $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}$ nên

$$\sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{\dfrac{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2}}$$

Do đó $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$

8. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Rightarrow AB \perp CD$.

b) Ta tính được

$\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

$= \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2) =$

$= \dfrac{1}{2}(AB^2\cos 60^\circ + AB^2\cos 60^\circ - AB^2)$

$= 0$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = 0$, do đó $MN \perp AB$.

Tương tự ta chứng minh được $MN \perp CD$ bằng cách tính

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$= 0$.

§3.

1. a) Đúng ; b) Sai ;
c) Sai ; d) Sai.

2. a) $\left.\begin{matrix} BC \perp AI \\ BC \perp DI \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (ADI)$

b) $BC \perp (ADI) \Rightarrow BC \perp AH$

mà $ID \perp AH$ nên $AH \perp (BCD)$.

3. a) $\left.\begin{matrix} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

b) $\left.\begin{matrix} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{matrix}\right\} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

$\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

4. a) $\left.\begin{matrix} BC \perp OH \\ BC \perp OA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (AOH)$

$\Rightarrow BC \perp AH$.

Tương tự ta chứng minh được $CA \perp BH$ và $AB \perp CH$, nên H là trực tâm của tam giác ABC.

b) Gọi K là giao điểm của AH và BC. Ta có OH là đường cao của tam giác vuông AOK nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2}. \qquad (1)$$

Trong tam giác vuông OBC với đường cao OK ta có :

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}.$$

5. a) $\left.\begin{matrix} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD).$

b) $\left.\begin{matrix} AB \perp SH \\ AB \perp SO \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SOH).$

6. a) $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp SC.$

b) $BD \perp (SAC)$ mà $IK \parallel BD$ nên $IK \perp (SAC)$.

7. a) $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow AM \perp BC$, mà $AM \perp SB$ nên $AM \perp (SBC)$.

b) Chứng minh $SB \perp (AMN)$

$\Rightarrow SB \perp AN.$

8. a) Giả sử có hai đường xiên SM và SN bằng nhau. Khi đó ta có hai tam giác vuông SHM và SHN bằng nhau.

Do đó : $SM = SN \Leftrightarrow HM = HN$.

b) Giả sử có hai đường xiên : $SA > SB$. Trên tia HA ta lấy điểm B' sao cho $HB' = HB$, khi đó $SB' = SB$ và $SA > SB'$. Dùng định lí Py-ta-go, xét hai tam giác vuông SHA và SHB' ta suy ra điều cần chứng minh.

§4.

1. a) Đúng ; b) Sai.
2. $CD = 26$ (cm).
3. a) Chứng minh $BC \perp (ABD)$, suy ra $\widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

b) Chứng minh $BC \perp (ABD)$.

c) Chứng minh $DB \perp AH$ và $DB \perp HK$. Trong mặt phẳng (BCD), chứng minh $HK \parallel BC$.

4. Xét hai trường hợp (α) cắt (β) và $(\alpha) \parallel (\beta)$. Nếu (α) cắt (β) giao tuyến Δ được xác định duy nhất. Qua M có một và chỉ một mặt phẳng (P) vuông góc với Δ.

Nếu $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì ta có vô số mặt phẳng (P).

5. a) Chứng minh $AB' \perp (BCD'A')$.

b) Chứng minh $(ACC'A')$ là mặt phẳng trung trực của đoạn BD và $(ABC'D')$ là mặt phẳng trung trực của đoạn $A'D$. Hai mặt phẳng này cùng vuông góc với mặt phẳng (BDA') nên có giao tuyến AC' vuông góc với (BDA').

6. a) Chứng minh $AC \perp (SBD)$ và suy ra $(ABCD) \perp (SBD)$.

b) Chứng minh $OS = OB = OD$ và suy ra tam giác SBD vuông tại S.

7. a) Chứng minh $AD \perp (ABB'A')$.

b) $AC' = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

8. Độ dài đường chéo của hình lập phương cạnh a bằng $a\sqrt{3}$.

9. Chứng minh $BC \perp (SAH)$ và suy ra $BC \perp SA$. Tương tự, chứng minh $AC \perp SB$.

10. a) $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Chứng minh $SC \perp (BDM)$

$\Rightarrow (SAC) \perp (BDM)$.

c) Chứng minh $OM = \frac{a}{2}$ và có $MC = \frac{a}{2}$

mà $\widehat{OMC} = 90^\circ$ nên $\widehat{MOC} = 45^\circ$.

11. a) $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

b) Hai tam giác vuông SCA và IKA đồng dạng nên $IK = \frac{SC.AI}{SA} = \frac{a}{2}$.

c) $\widehat{BKD} = 90^\circ$ vì $IK = ID = IB = \frac{a}{2}$.

$SA \perp (BDK)$ và $\widehat{BKD} = 90^\circ$,

suy ra $(SAB) \perp (SAD)$.

§5.

1. a) Sai ; b) Đúng ; c) Đúng ; d) Sai ; e) Sai .

2. a) Cần chứng minh $SA \perp BC$ và $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SE$.
(Với $E = AH \cap BC$)
Vậy AH, SK, BC đồng quy.

b) Cần chứng minh $BH \perp (SAC)$ và suy ra $SC \perp (BKH)$,

$$\left.\begin{array}{l} SC \perp (BKH) \Rightarrow SC \perp HK \\ BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp HK \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow HK \perp (SBC)$.

c) AE là đường vuông góc chung của SA và BC.

3. Khoảng cách d từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau vì chúng đều là độ dài đường cao của các tam giác vuông bằng nhau.

$\Delta ABC' = \Delta AA'C' = \ldots$

Ta tính được $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

4. a) Kẻ $BH \perp AC$ tại H, ta có $BH \perp (ACC'A)$, ta tính được

$$BH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

b) Khoảng cách giữa BB' và AC' chính là khoảng cách $BH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5. a) Chứng minh $B'D$ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau của $(BA'C')$.

b) Gọi I và H lần lượt là trọng tâm của $\Delta ACD'$ và $\Delta BA'C'$ thì IH là khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(BA'C')$ và (ACD'),

$$IH = \frac{B'D}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

c) Gọi d là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BC' và CD', $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

6. Vẽ qua trung điểm K của cạnh CD đường thẳng song song với AB sao cho $ABB'A'$ là hình bình hành với K là trung điểm của $A'B'$.

Chứng minh hai tam giác vuông BCB' và ADA' bằng nhau. Từ đó suy ra $BC = AD$. Chứng minh tương tự ta có $AC = BD$.

7. Khoảng cách từ đỉnh S tới mặt đáy (ABC) bằng độ dài đường cao SH của hình chóp tam giác đều. Ta tính được :

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a.$$

8. Gọi I và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Vì $IC = ID$ nên $IK \perp CD$. Tương tự chứng minh được $IK \perp AB$. Vậy IK là đường vuông góc chung của AB và CD.

Do đó $IK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. a) Đúng ; b) Đúng ;
c) Sai ; d) Sai ;
e) Sai.

2. a) Đúng ; b) Sai ;
c) Sai ; d) Sai.

3. a) Áp dụng định lí ba đường vuông góc ta chứng minh được bốn mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b) Chứng minh $BD \perp SC$ và suy ra $B'D' \perp SC$. Vì BD và $B'D'$ cùng nằm trong mặt phẳng (SBD) nên $BD \parallel B'D'$.

Ta chứng minh $AB' \perp (SBC)$
$\Rightarrow AB' \perp SB$.

4. a) Chứng minh
$BC \perp (SOF) \Rightarrow (SBC) \perp (SOF)$;

b) $d(O, (SBC)) = OH = \dfrac{3a}{8}$;

$d(A, (SBC)) = d(I, (SBC)) = IK$

$$= 2OH = \frac{3a}{4}.$$

5. a) Ta chứng minh $BA \perp (ADC) \Rightarrow$ tam giác BAD vuông tại A.

Dùng định lí ba đường vuông góc ta chứng minh BDC là tam giác vuông tại D.

b) Chứng minh tam giác AKD cân tại K và suy ra $KI \perp AD$.

Chứng minh tam giác IBC cân tại I và suy ra $IK \perp BC$.

Do đó IK là đoạn vuông góc của AD và BC.

6. a) $\left.\begin{array}{l} BC' \perp B'C \\ BC' \perp A'B' \end{array}\right\} \Rightarrow BC' \perp (A'B'CD)$

b) Đoạn vuông góc chung của AB' và BC' là $KI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

7. a) $d(S, (ABCD)) = SH = \frac{a\sqrt{15}}{6}$,

$SC = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

b) Vì $SH \perp (ABCD)$ với $H \in AC$ nên $(SAC) \perp (ABCD)$.

c) Vì $SB^2 + BC^2 = SC^2$ nên $SB \perp BC$.

d) $\tan\varphi = \frac{SH}{HO} = \sqrt{5}$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Gọi tam giác $A'B'C'$ là ảnh của tam giác ABC qua các phép biến hình trên, khi đó

a) $A'(3 ; 2)$, $B'(2 ; 4)$, $C'(4 ; 5)$;

b) $A'(1 ; -1)$, $B'(0 ; -3)$, $C'(2 ; -4)$;

c) $A'(3 ; 1)$, $B'(4 ; -1)$, $C'(2 ; -2)$;

d) $A'(-1 ; 1)$, $B'(-3 ; 0)$, $C'(-4 ; 2)$;

e) $A'(2 ; -2)$, $B'(0 ; -6)$, $C'(4 ; -8)$.

2. a) F là phép vị tự tâm G, tỉ số $-\frac{1}{2}$.

b) Để ý rằng O là trực tâm của tam giác $A'B'C'$.

c) $F(O) = O_1$ là trung điểm của OH.

d) Ảnh của A, B, C, A_1, B_1, C_1 qua phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$ tương ứng là A'', B'', C'', A_1', B_1', C_1'.

e) Chứng minh A'', B'', C'', A_1', B_1', C_1' cùng thuộc đường tròn (O_1). Sau đó chứng minh A', B', C' cũng thuộc đường tròn (O_1). Chẳng hạn, chứng minh $O_1A_1' = O_1A'$.

3. a) Gọi $(\alpha) = (ES, EM)$, (α) cắt (SAC) và (SBD) theo giao tuyến là đường thẳng SO với $O = AC \cap BD$.

b) $SE = (SAD) \cap (SBC)$.

c) Gọi $O' = AC' \cap BD'$. Chứng minh $O' \in SO = (SAC) \cap (SBD)$.

4. Chứng minh tứ giác $MNFE$ là hình bình hành.

5. Gọi $\mathscr{L}$ là hình lập phương.

– $(EFB) \cap \mathscr{L} = ABIF$ với $FI \parallel AB$.

– $(EFC) \cap \mathscr{L} = ECFH$ với $CF \parallel EH$.

– $(EFC') \cap \mathscr{L} = EMC'FL$ với $EM \parallel FC'$ và $FL \parallel C'M$.

– Thiết diện tạo bởi (EFK) và hình lập phương là hình lục giác đều.

6. a) Gọi I là tâm hình vuông $BCC'B'$. Vẽ $IK \perp BD'$ tại K. IK là đường vuông góc chung của BD' và $B'C$.

b) $KI = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

7. a) Sử dụng định lí ba đường vuông góc.

b) Chứng minh AD', AC' và AB cùng vuông góc với SD.

c) $C'D'$ luôn đi qua I với $I = AB \cap CD$.

BẢNG THUẬT NGỮ

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản : Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc **NGÔ TRẦN ÁI**
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập **NGUYỄN QUÝ THAO**

Biên tập nội dung : **ĐẶNG THỊ BÌNH - NGUYỄN ĐẶNG TRÍ TÍN**
Biên tập tái bản : **ĐẶNG THỊ BÌNH**
Biên tập kĩ thuật : **BÙI NGỌC LAN**
Trình bày bìa : **NGUYỄN MẠNH HÙNG**
Minh hoạ : **NGUYỄN MẠNH HÙNG**
Sửa bản in : **PHÒNG SỬA BẢN IN** (NXBGD TẠI TP. HCM)
Chế bản : **PHÒNG CHẾ BẢN** (NXBGD TẠI TP. HCM)

HÌNH HỌC 11
Mã số : CH102T0

In 35.000 bản (QĐ10); khổ 17 x 24 cm.
In tại Công ti cổ phần in Nam Định.
Số in: 24. Số XB: 01-2010/CXB/567-1485/GD.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2010.

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

LONDON QUALITY CROWN QC 100

VƯƠNG MIỆN KIM CƯƠNG CHẤT LƯỢNG QUỐC TẾ

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11

1. TOÁN HỌC
   - ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11
   - HÌNH HỌC 11
2. VẬT LÍ 11
3. HOÁ HỌC 11
4. SINH HỌC 11
5. NGỮ VĂN 11 (tập một, tập hai)
6. LỊCH SỬ 11
7. ĐỊA LÍ 11
8. TIN HỌC 11
9. CÔNG NGHỆ 11
10. GIÁO DỤC CÔNG DÂN 11
11. GIÁO DỤC QUỐC PHÒNG - AN NINH 11
12. NGOẠI NGỮ
    - TIẾNG ANH 11
    - TIẾNG PHÁP 11
    - TIẾNG NGA 11
    - TIẾNG TRUNG QUỐC 11

SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11 - NÂNG CAO

Ban Khoa học Tự nhiên :
- TOÁN HỌC (ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11, HÌNH HỌC 11)
- VẬT LÍ 11 • HOÁ HỌC 11 • SINH HỌC 11

Ban Khoa học Xã hội và Nhân văn :
- NGỮ VĂN 11 (tập một, tập hai)
- LỊCH SỬ 11 • ĐỊA LÍ 11
- NGOẠI NGỮ (TIẾNG ANH 11, TIẾNG PHÁP 11, TIẾNG NGA 11, TIẾNG TRUNG QUỐC 11)

8 934980 005675

Giá: 5.800 đ